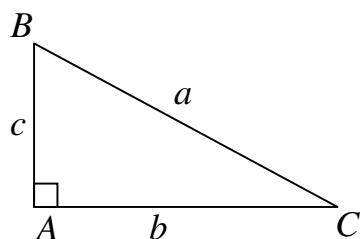


مثلثات



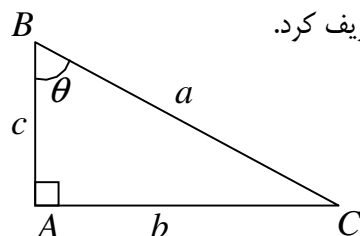
هر مثلث که یک زاویه ی قائمه داشته باشد، را مثلث قائم الزاویه می نامند. در هر مثلث قائم الزاویه ، ضلع روبرو به زاویه ی قائمه را وتر می نامند.

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است. (رابطه ی فیثاغورس)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

تعریف نسبت های مثلثاتی یک زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه

برای هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه نسبت های مثلثاتی زیر را می توان بدین ترتیب تعریف کرد.



سینوس هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مقابل زاویه براندازه ی وتر برابر است.

$$\sin \theta = \frac{b}{a}$$

کسینوس هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مجاور زاویه براندازه ی وتر برابر است.

$$\cos \theta = \frac{c}{a}$$

تانژانت هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مقابل زاویه بر اندازه ی ضلع مجاور آن برابر است.

$$\tan \theta = \frac{b}{c}$$

کوتانژانت هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مجاور زاویه بر اندازه ی ضلع مقابل آن برابر است.

$$\cot \theta = \frac{c}{b}$$

توجه : علاوه بر نسبت های فوق دو نسبت دیگر را می توان تعریف نمود.

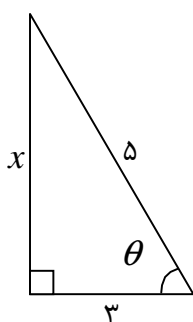
سکانت زاویه ی حاده با معکوس کسینوس آن زاویه برابر است.

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

کسکانت زاویه ی حاده با معکوس سینوس آن زاویه برابر است.

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

تمرین : با توجه به شکل مقابل ، نسبت های مثلثاتی زاویه ی θ را به دست آورید.



تمرین : ثابت کنید که سینوس و کسینوس هر زاویه ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه ، همواره از یک کوچکترند.

تمرین : اگر θ یک زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه ای باشد، ثابت کنید که :

$$۱) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = ۱$$

$$۴) ۱ + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$۲) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$۵) ۱ + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

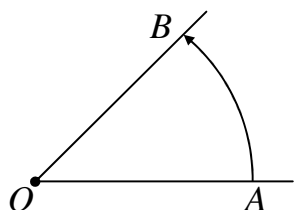
$$۳) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$۶) \tan \theta \cdot \cot \theta = ۱$$

تمرین : ثابت کنید که سینوس یک زاویه ی ۳۰° درجه برابر $\frac{1}{2}$ است.

زاویه و واحد های اندازه گیری آن

اگر نقطه ی A را حول نقطه ی O دوران دهیم تا نقطه ی B بدست آید. در این صورت زاویه ی AOB به دست می آید.



تذکر :

۱ : اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را مثبت و اگر در جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را منفی در نظر می گیرند.

۲ : اگر نقطه ی A را دوران داده نشود، زاویه صفر می باشد. اگر نقطه ی A را به اندازه ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اولیه ی خود بر می گردد. یک دوران کامل زاویه ای برابر 360° درجه تشکیل می دهد.

واحد های اندازه گیری زاویه

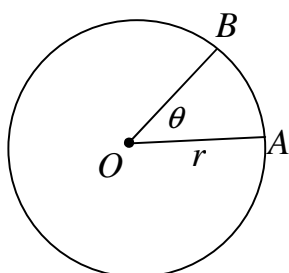
هر زاویه دارای دو واحد اندازه گیری می باشد.

الف : درجه

یک درجه زاویه ای است که اندازه ی آن برابر $\frac{1}{360}$ دوران کامل است.

ب : رادیان

یک رادیان اندازه ی زاویه ای است که کمان روبروی آن برابر شعاع دایره باشد.



$$\overset{\frown}{AB} = r \rightarrow \angle \theta = 1 \text{ rad}$$

نتیجه : یک دوران کامل (دایره) برابر 360° درجه و 2π رادیان است.

برای تبدیل واحد های اندازه ی زاویه از رابطه ی زیر استفاده می شود.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

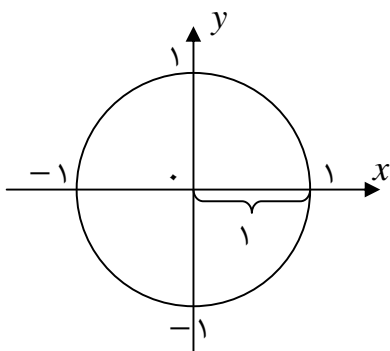
تمرین : اندازه ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین : اندازه ی زاویه ای ۹۰- درجه است، اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین : اندازه ی زاویه ای $\frac{2\pi}{3}$ رادیان است، اندازه ی این زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

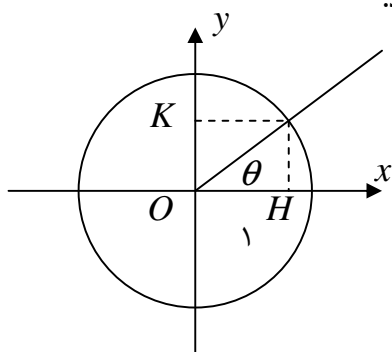
تعریف دایره ی مثلثاتی :

هر دایره به شعاع واحد که مرکز آن مبدأ مختصات باشد را دایره ی مثلثاتی می نامند.



تعریف نسبت های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی

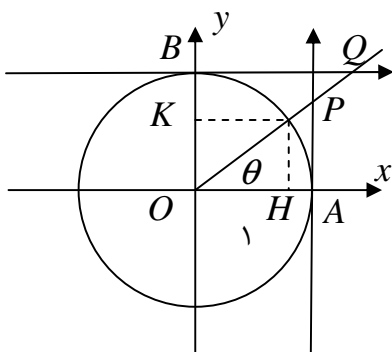
در هر دایره ی مثلثاتی نسبت های مثلثاتی هر زاویه مانند θ به صورت زیر تعریف می شود.



$$\sin \theta = OK$$

$$\cos \theta = OH$$

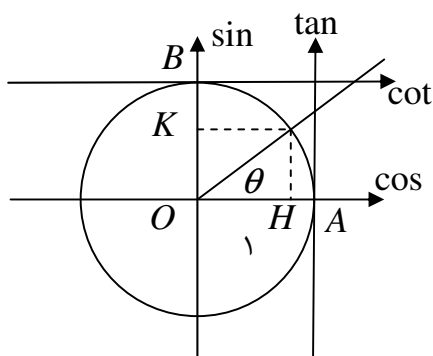
حال اگر دو محور دیگر به دستگاه فوق مطابق شکل اضافه کنیم. خواهیم داشت.



$$\tan \theta = AP$$

$$\cot \theta = BQ$$

با توجه با این تعاریف است که نام محور ها را به صورت زیر نیز تغییر می دهند.



تمرین : زاویه ی ۱۲۰° در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

تمرین : زاویه ی -۴۵° در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

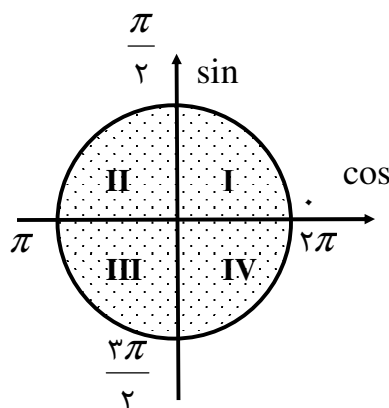
نتیجه : با توجه به تعاریف فوق واضح است که :

۱ : سینوس و کسینوس هر زاویه ، عددی است که در فاصله ی $[-۱, ۱]$ قرار می گیرد.

$$-۱ \leq \sin \alpha \leq ۱ \quad \text{و} \quad -۱ \leq \cos \alpha \leq ۱$$

۲ : علامت نسبت های مثلثاتی را به شکل جدول زیر می توان تعیین کرد.

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-



۳ : مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم را می توان به صورت جداول زیر تنظیم نمود.

(الف)

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	نامعین
cot		نامعین	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

(ب)

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	-۱	۰
cos		۱	۰	-۱	۰	۱
tan		۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

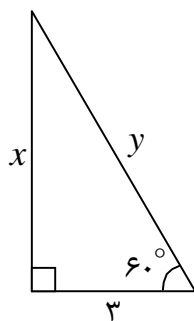
اتحاد های بنیادی مثلثات

۱. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	۴. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	۷. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
۲. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	۵. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	۸. $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$
۳. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	۶. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	

تمرین: اگر $\tan \theta = 3$ باشد، حاصل عبارت $\frac{3 \sin \theta + 4 \cos \theta}{4 \cos \theta - 3 \sin \theta}$ را به دست آورید.

تمرین: اگر $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$ باشد، حاصل عبارت $\sin \alpha + \cos \alpha$ را محاسبه کنید.

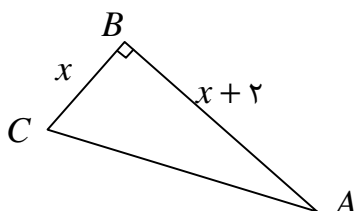
تمرین: با توجه به شکل مقابل مقادیر x و y را به دست آورید.



تمرین : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \sin 30^\circ \tan 60^\circ + \sqrt{3} \sin^2 45^\circ$$

تمرین : در مثلث قائم الزاویه ی مقابل اگر $\tan A = \frac{1}{3}$ باشد. مقدار x را تعیین کنید.



تمرین : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sin(-60^\circ)$

ب) $\cos(-60^\circ)$

تمرین : اگر $\cos \alpha = 2m - 5$ باشد. حدود m را تعیین کنید.

تمرین : نسبت های مثلثاتی زاویه ی $-\frac{\pi}{4}$ را به دست آورید.

تمرین : اگر $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و زاویه ی θ در ربع دوم قرار دارد. در این صورت سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

تمرین : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$$

تمرین : درستی هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

۱) $\tan \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \sec \alpha$

۳) $\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{1 - \sin^2 x} = \tan^2 x$

۲) $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 2 \csc \theta$

۴) $(\sin x - \cos x) \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) = \tan x - \cot x$
