فصل چهارم :

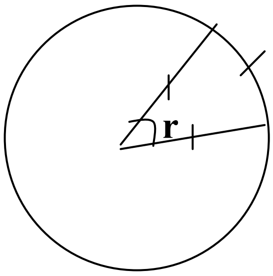
نسبتهای مثلثاتی

واحدهای اندازه گیری زاویه

۱) درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم اندازه زاویه مرکز ی روبه رو بـه هـر کمان را یک درجه گویند و با 1° هم نمایش می دهند .

۲) گرادیان : اگر محیط دایره به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم اندازه زاویه مرکزی روبه روهر کمان را یک گرادیان می گویند و 1^{gr} با نمایش می دهند

۳)رادیان :اندازه زاویه مرکزی روبه رو به کمانی از دایـره اسـت کـه برابـر شـعاع دایـره اسـت وبـا 1^{rad}نشان می دهند



نکته : بین واحدهای اندازه گیری زاویه رابطه زیر بر قرار است

$$\frac{D}{360}=\frac{G}{400}=\frac{R}{2\pi} \Longrightarrow \frac{D}{180}=\frac{D}{200}=\frac{R}{\pi}$$

مثال :۳۰ درجه چند رادیان و چندگرادیان است؟

$$\frac{D}{180}=\frac{30}{180}\Rightarrow\frac{G}{200}=\frac{G}{200}\Rightarrow 200=6G\Rightarrow G=\frac{200}{6}\Rightarrow G=\frac{100}{3}^{gr}$$

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{3}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow \pi=6R\Rightarrow R=\frac{\pi}{6}$$

مثال : $\frac{\pi}{3}$ چند درجه چند است؟

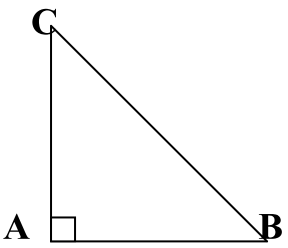
$$\frac{D}{180}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{8}{1}}\Rightarrow\frac{D}{180}=\frac{\pi}{3\pi}\Rightarrow\frac{D}{180}=\frac{1}{3}\Rightarrow D=\frac{180}{3}\Rightarrow D=60^{\circ}$$

$$\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{G}{200},\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{8}{1}}\Rightarrow\frac{G}{200}=\frac{\pi}{3\pi}\Rightarrow G=\frac{200}{3}^{gr}$$

تمرین: اگر به اندازه زاویه بر حسب درجه ۵۰ واحد اضافه شود

اندازه زاویه بر حسب گرادیان بدست می آید این زاویه چند درجه است ؟

نسبتهای اصلی:



$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AB}{AC}$$

نسبتهای فرعی

سکانت $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

کسکانت $\cos ec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

نتایج:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot g\,\alpha$$

$tg\,\alpha = \frac{1}{\cot g\,\alpha}$ **یا** $\cot g\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$ **یا** $tg\,\alpha . \cot g = 1$

مثال:نشان دهید

الف) $۱+\cot g^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$

ب) $۱+tg^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$

دو طرف تقسیم $\sin^{۲}\alpha$

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Longrightarrow \frac{\sin^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}+\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

$$۱+\cot g^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

مثال:اگر $\sin x+\cos x=\frac{۱}{۳}$ **sinx.cosx را بدست آورید**

$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

اتحاد اول

$$(\sin x+\cos x)^{۲}=(\frac{۱}{۳})^{۲}$$

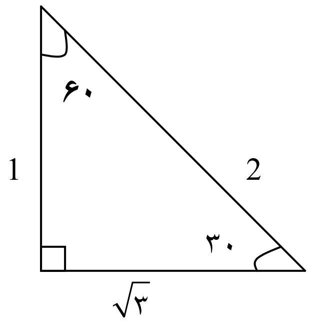
$$\sin^{۲}x+۲\sin x.\cos x+\cos^{۲}x=\frac{۱}{۹}$$

$$۱+۲\sin x.\cos x=\frac{۱}{۹}\Rightarrow ۲\sin.\cos x=\frac{۱}{۹}-۱=-\frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow ۲\sin x.\cos x=-\frac{۸}{۹}\Rightarrow \sin.\cos x=\frac{-\frac{۸}{۹}}{\frac{۲}{۱}}\Rightarrow \sin x\cos x=-\frac{۸}{۱۸}$$

تمرین : اگر $tgx=۲$ **باشد مقدار عبارت** $A=\frac{\sin x+۲\cos x}{۲\sin x-\cos x}+۳\cot gx$ **را بدست آورید ؟**

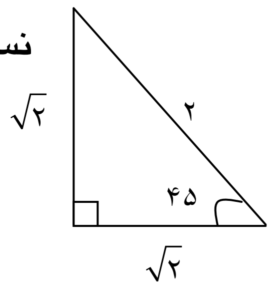
مثال:فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه با شرایط زیر باشد تمام نسبتهای مثلثاتی ۳۰ درجه را بدست آورید



$\sin ۳۰ = \frac{۱}{۲}$ $\qquad tg\, ۳۰ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\cos ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\qquad \cot g\, ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$

$\sin ٦٠ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\qquad \cos ٦٠ = \frac{۱}{۲}$ $\qquad tg\, ٦٠ = \sqrt{۳}$ $\qquad \cot ٦٠ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

تمرین:با فرض  **نسبتهای مثلثاتی ۴۵ درجه را بیابید**

در حالت کلی :

α	30	45	60
$\sin\alpha$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	1	$\sqrt{۳}$
$\cot g\,\alpha$	$\sqrt{۳}$	1	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

مثال : درستی رابطه زیر را نشان دهید ؟

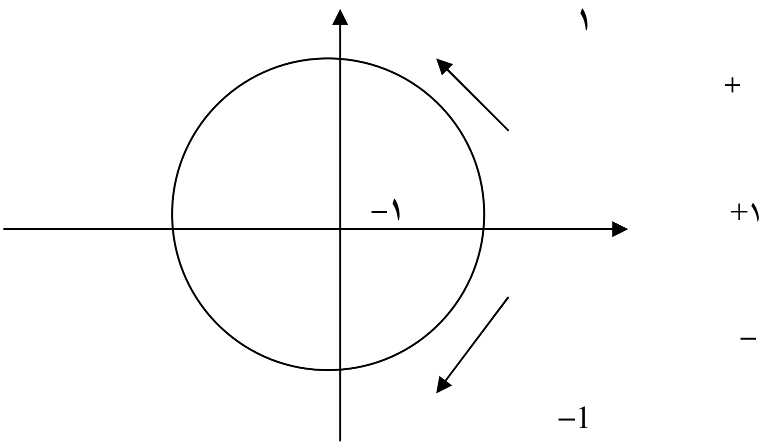
$$\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)=tg^{2}x$$

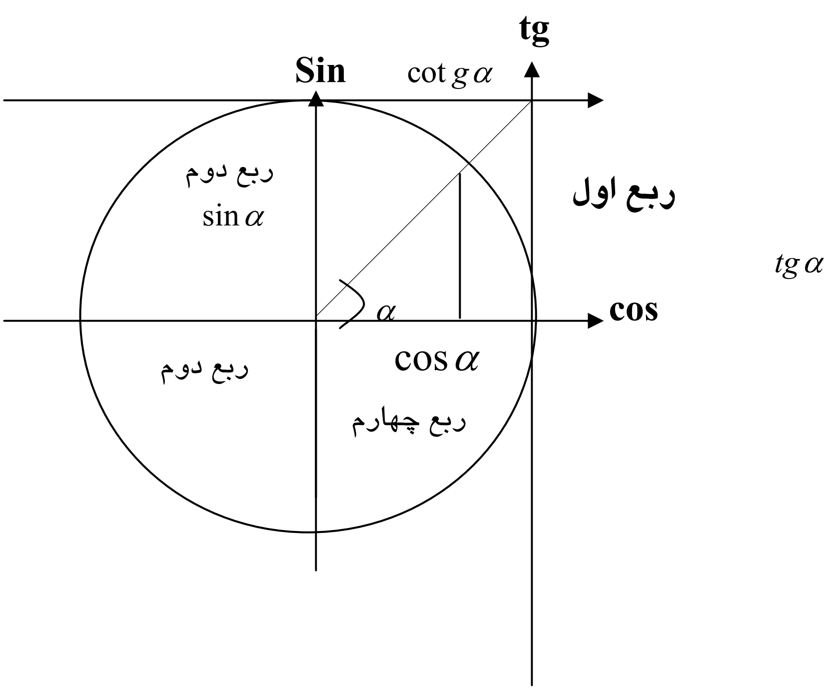
$$\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)=\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2}+\cancel{\frac{1}{\cos x}}-\cancel{\frac{1}{\cos x}}-1$$

$$=\frac{1}{\cos^{2}x}-1=\frac{1-\cos^{2}}{\cos^{2}x}=\frac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}=tg^{2}x$$

دایره مثلثاتی:

دایره ایست به مرکز مبداءمختصات و شعاع یک ، دارای دو جهت مثبت و منفی که جهت مثبت خلاف حرکت عقربه های ساعت و جهت منفی موافق حرکت عقربه های ساعت می باشد .





باتوصیف و توضیحات بالا نتایج زیر بدست می آورید.

نتیجه(۱)

α	0	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\pi}{3}=60^\circ$	$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	$\pi=180^\circ$	$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$	$360^\circ=2\pi$
$\sin\alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-1	۰
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-1	۰	۱
$tg\,\alpha$	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot g\,\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

نتیجه(۲)به ازای هر زاویه α

$$-1\leq \sin\alpha \leq 1$$

$$-1\leq \cos\alpha \leq 1$$

$$-\infty < tg\,\alpha < +\infty$$

$$-\infty < \cot\alpha < +\infty$$

نتیجه ۳:

α	$0<\alpha<90$ ربع اول	$90<\alpha<180$ ربع دوم	$180<\alpha<270$ ربع سوم	$270<\alpha<360$ ربع چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$tg\,\alpha$	+	−	+	−
$\cot g\,\alpha$	+	−	+	−

نتیجه ۴ :

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$$
$$\cot g(-\alpha) = -\cot g\,\alpha$$

اصطلاحاً می گوییم f(x)=cosx تابعی زوج و بقیه sinx و tgx و cotx تابعی فرد هستند

مثال: فرض کنید $\sin x = -\frac{۱}{۳}$, x در ربع سوم مثلثاتی باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$$
$$(-\frac{۱}{۳})^۲ + \cos^۲ x = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۹} + \cos^۲ x = ۱ \Rightarrow \cos^۲ = ۱ - \frac{۱}{۹} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۸}{۹}$$

جذر

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos x = \pm\sqrt{\frac{۸}{۹}} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۹}} \Rightarrow \cos x = \mp\frac{\sqrt{۸}}{۳}$$

چون x در ربع سوم مثلثاتی است پس نتیجه منفی قابل قبول است

$$\boxed{\cos x = -\frac{\sqrt{۸}}{۳}}$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{۱}{۳}}{-\frac{\sqrt{۸}}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۸}}, \cot x = \sqrt{۸}$$

مثال۲ : فرض کنید $tgx = -۲$ و x در ربع دوم مثلثاتی باشد سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آورید ؟

اگر cotgx معلوم باشد $۱ + \cot g^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x}$

$$۱ + tg^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$۱ + (-۲)^۲ = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۵ = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

چون x در ربع دوم است و $\cos x < ۰$ پس مثبت و قابل قبول نیست

$$\boxed{\cos x = -\frac{۱}{\sqrt{۵}}}$$

$$\sin x = tgx.\cos x \Rightarrow \sin x = (-۲)(-\frac{۱}{\sqrt{۵}}) = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \sin x = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\cot x = \frac{۱}{tgx} = -\frac{۱}{۲}$$

مثال۳): علامت عبارتهای زیر را تعیین کنید

الف) α **در ربع دوم**

$$\overset{+}{\sin\alpha} + (\overset{-}{\cos\alpha}.\overset{-}{\cot g}) > ۰$$

ب) α **در ربع چهارم**

$$(\overset{-}{tg\alpha} + \overset{-}{\cot g\alpha})\overset{-}{\sin\alpha} + \overset{+}{\cos\alpha} > ۰$$

مثال۴) : حداقل و حداکثر مقدارهای زیر را بدست آورید

الف)

$$۵\sin\alpha - ۲\cos\alpha$$

$$۶\sin x - \cos^{۲} x$$

الف)

$$۵(-۱) - ۲(-۱) = -۵ + ۲ = -۳$$

$$۵(۱) - ۲(-۱) = ۵ + ۲ = ۷ \longleftarrow \text{حداکثر}$$

$$۵(-۱) - ۲(۱) = -۵ - ۲ = -۷ \longleftarrow \text{حداقل}$$

$$۵(۱) - ۲(۱) = ۵ - ۲ = ۳$$

روش دوم

$$+\begin{cases} -۱ \le \sin\alpha \le ۱ \xrightarrow{\times 5} -۵ \le ۵\sin\alpha \le ۵ \\ -۱ \le \cos\alpha \le ۱ \xrightarrow{\times -2} -۲ \le -۲\cos\alpha \le ۲ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$-۷ \le ۵\sin\alpha - ۲\cos\alpha \le ۷$$

نسبتهای مثلثاتی $\alpha + B$ و $\alpha - B$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha.tg\,\beta}$$

$$\cot g(\alpha+\beta)=\frac{\cot g\,\alpha.\cot g\,\beta-1}{\cot g\,\alpha+\cot g\,\beta}$$

نکته

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ tg(-\alpha)=-tg\,\alpha\\ \cot g(-\alpha)=-\cot\alpha\end{array}\right\}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\Rightarrow$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{۱+tg\,\alpha tg\,\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot g\,\beta+۱}{\cot g\,\beta-\cot g\,\alpha}$$

مثال: نسبتهای مثلثاتی ۷۵° و ۱۵° را بدست آورید

$$\sin ۷۵^\circ=\sin(۳۰+۴۵)=\sin ۳۰\cos ۴۵+\cos ۳۰\sin ۴۵$$

$$=(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۶}}{۴}-\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos ۷۵^\circ=\cos(۳۰+۴۵)=\cos ۳۰\cos ۴۵-\sin ۳۰\sin ۴۵$$

$$=(\frac{\sqrt{۳}}{})(\frac{\sqrt{۲}}{})-(\frac{۱}{})(\frac{\sqrt{۲}}{})$$

$$=\frac{\sqrt{۶}}{}-\frac{\sqrt{۲}}{}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{}$$

$$tog\,۷۵^{\circ} = \frac{\sin ۷۵}{\cos ۷۵} = \frac{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}$$

$$\cot g\,۷۵^{\circ} = \frac{۱}{tg\,۷۵^{\circ}} = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}$$

$$\sin ۱۵^{\circ} = \sin(۴۵-۳۰)^{\circ} \rightarrow \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$=\sin(۴۵)\cos(۳۰)-\cos(۴۵)\sin(۳۰)$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}.\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}.\frac{۱}{۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۶}}{۴}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos ۱۵^{\circ} = \cos(۴۵-۳۰) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}.\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}.\frac{۱}{۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۶}}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

$$tg\,۱۵^{\circ}=\frac{\sin ۱۵^{\circ}}{\cos ۱۵^{\circ}}=\frac{\frac{\sqrt{۶-\sqrt{۲}}}{۴}}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}$$

$$\cot g\,۱۵^{\circ}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}$$

نسبتهای مثلثاتی $2\pi+\alpha, \pi+\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha$

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha.\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha\sin\frac{\pi}{2}=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}=-\sin\alpha$$

$$tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\cot g\,\alpha$$

$$\cot g\,\alpha(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\,\alpha$$

تمرین۱:نسبتهای مثلثاتی $\pi+\alpha, 2\pi+\alpha$ **را بدست آورید**

تمرین۲:نسبتهای مثلثاتی $2\pi-\alpha, \pi-\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha$ **را بدست آورید**

نسبتهای مثلثاتی 2α

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \cos 2\alpha&=2\cos^2\alpha-1\\ \cos 2\alpha&=1-2\sin^2\alpha\end{aligned}}$$

$$tg\,2\alpha=tg(\alpha+\alpha)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha tg\,\alpha}=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\boxed{tg\,2\alpha=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

$$\cot g\,2\alpha=\cot g(\alpha+\alpha)=\frac{\cot g\,\alpha.\cot\alpha-1}{\cot g\,\alpha+\cot\alpha}\Rightarrow\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

تمرین و تحقیق :

فرمولهای مجموع ، تفاضل دو نسبت را به حاصلضرب و برعکس را نوشته و سپس مثالهایی نیز ارائه دهید ؟