فــهرســت

بنام خدا

مجموعه ها

فصل اول

مجموعه یک مفهوم تعریف نشده است اما برای معرفی می توانیم بگوییم مجموعه ، گروهی از اشیاء است که اعضاء آن مشخص باشند.

می توانیم ۲ دسته مجموعه در نظر بگیریم:

۱. مجموعه های متناهی (پایان پذیر)
۲. مجموعه های نا متناهی (پایان نا پذیر)

۱ – مجموعه های متناهی مجموعه هایی هستند که عضو پایانی آنها مشخص باشد .

۲ – مجموعه های نا متنهاهی مجموعه هایی هستند که عضوپایانی مجموعه وجود ندارد.

مثال مجموعه های متنهاهی: مجموعه های همه دانشجویان جهان

مثال مجموعه های نا متنهاهی: مجموعه اعداد {1,2,3,4,...}

۱. مجموعه اعداد طبیعی؟ (نا متناهی)
۲. مجموعه اعداد زوج کمتر از صد هزار؟ (متناهی)
۳. مجموعه اعداد حقیقی صفر و یک؟ (نا متناهی)
۴. مجموعه افرادی که دارای گروه خونی A هستند؟ (متناهی)

تذکر :

اعداد طبیعی $N_1 \{1,2,3,...\}$ **اعداد حسابی** $W_1 \{0, 1,2,3,...\}$

اعداد صحیح $Z_1 \{....-2,-1,0, 1,2,3,...\}$ **اعداد گویا** $Q\ \{\frac{a}{b} \mid a,b \in 2', b \neq\ \}$

اعداد گنگ : 'Q اعدادی که گویا نیستند.   **اعداد واقعی(IR)** شامل تمام اعداد.

بجز اعداد با مخرج صفر و رادیکال با فرجه زوج که زیر رادیکال منفی باشد.

هر شیئ موجود در یک مجموعه را یک عضو و یا عنصر آن مجموعه می گوییم. هر مجموعه را معمولاً با حرف بزرگ لاتین مشخص می کنیم.

نمایش مجموعه ها

1. نمایش تفصیلی
2. نمایش توصیفی
3. نمایش با نمودار (ون)

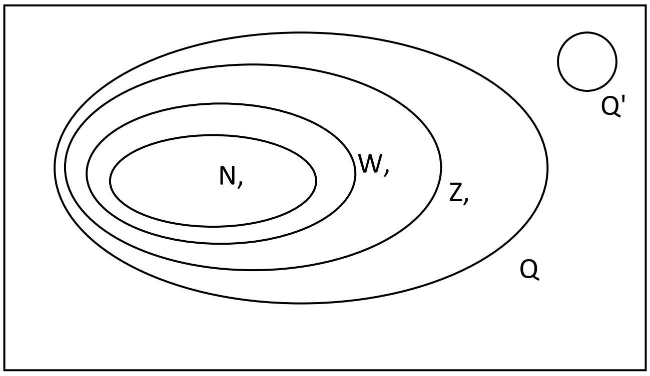
۱ - نمایش تفصیلی : در این نوع نمایش تمام اعضاء مجموعه را داخل ۲ نماد { } یا آکولاد می نویسیم مانند مجموعه فوق:

$A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{1,2,3,4,...,54,55\}$

۲ - نمایش توصیفی : در این نوع نمایش ویژگی های مربوط به اعضاء مجموعه را داخل { } توصیف می کنیم مانند مجموعه فوق: $A = \{x \mid x \in N , x < 7\}$ و $B = \{x \mid x \in N , 1 < x < 56\}$ و مجموعه اعداد زوج اول = $\{2\}$

۳ - نمایش مجموعه با استفاده از نمودار (ون) که در این نوع نمایش مجموعه مرجع را یک مستطیل در نظر می گیریم و سایر مجموعه ها را طوری که گویای ارتباط آنها باشد و با استفاده از اشکال هندسی (معمولاً دایره) داخل این مستطیل می کشیم.

نمودار (ون) مجموعه اعداد



تذکر :

مجموعه هایی را که هیچ عضوی نداشته باشد تهی می گوییم و با نماد $\emptyset$ نشان داده می شود و مجموعه ای را که با استفاده از آن مجموعه های دیگر را می نویسیم مجموعه مرجع در نظر می گیریم . $\mathbb{R}$

$A = \{2,4,5\}$　$B = \{6,7\}$　$U = \{2,4,5\}$ مجموعه مرجع

تعریف نماد $\in$ (عضویت) یا نماد تعلق میگوییم که مشخص می کند که عضوی مانند a به مجموعه A تعلق دارد یا خیر.

$a \in A$ و $a \notin A$　$A = \{a,2,b,5\}$

$a \in A$ درست　$a \notin A$ غلط　$6 \notin A$ درست　$5 \in A$ درست

تعریف : مجموعه A را زیر مجموعه مجموعه B می گوییم و هرگاه دو عضو A عضو B باشد می نویسیم :

$A \leq B \Leftrightarrow \vee x \in A => a \in B$

(سور عمومی فرضی می باشد که در مورد کل زده می شود . سور وجودی فرضی که در مورد یک جزء زده می شود)

اشتراک

اشتراک دو مجموعه A و B را بصورت A∩B نشان می دهیم. و شامل تمام اعضایی است که هم مجموعه A و هم مجموعه B باشد . یعنی عضوهای مشترک بین دو مجموعه

اثبات اشتراک $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

$A = \{ 1,2,3,4 \}$ $B = \{ 1,2,3,45,6 \}$ $A \cap B = \{ 1,2,3,4 \}$

اجتماع

اجتماع دو مجموعه A و B را بصورت AUB نشان می دهیم. و شامل عضوهایی است که در مجموعه A یا مجموعه B باشد. اثبات اجتماع $AUB = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

$A = \{ 2,5,7 \}$ $B = \{ 5,7,9.6 \}$ $C = \{ 1,2,3 \}$

$A \cap B = \{ 5, 7 \}$ $BUC = \{ 1,2,3,4,5,6,7,9 \}$

متمم

متمم مجموعه A را با 'A یا Ac نشان می دهیم و شامل اعضایی از مجموعه مرجع می شود که در a نباشد.

اثبات متمم $A' = \{ x \mid x \notin A \}$

$U = \{ 2,4,5,...,10 \}$ $A = \{ 2,4,6,8 \}$ $B = \{ 1,2,7.8,9 \}$

$A' = \{ 1,3,5,7,9,10 \}$ $B' = \{ 3,4,5,6,10 \}$

تذکر :

این ها همیشه ثابتند.

$\emptyset \leq A$ و $A \leq A$ و $U = \emptyset$ و $\emptyset = U$ و $AUA' = U$ و $A \cap A' = \emptyset$

تفاضل

تفاضل دو مجموعه A و B را بصورت A – B می نویسیم و شامل اعضاء *__فقط__* مجموعه A می باشد . به عبارت دیگر اعضاء B را از داخل A حذف می کنیم و باقی مانده اعضاء A – B است.

A = { a,b.c.d.e }   B = { d,e,g,h }

A - B = { a,b.c }   B - A = { g,h }

تفاضل متقارن

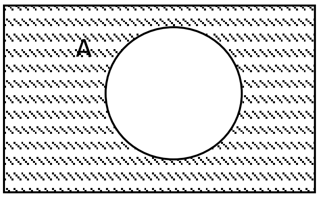
تفاضل متقارن دو مجموعه را با B △ A نشان می دهیم و شامل فقط عضوهای A و B می باشد. به عبارت دیگر تفاضل متقارن اجتماع دو مجموعه بجز عضوهای مشترک آنهاست.

اثبات تفاضل متقارن $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ و یا $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

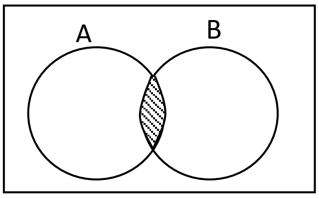
A = { 1,2,3,4,5 }   B = { 4,3,2,7,8 }

A△B = { 1,5,7,8 }   A - B = { 1,5 }   B - A = { 7,8 }

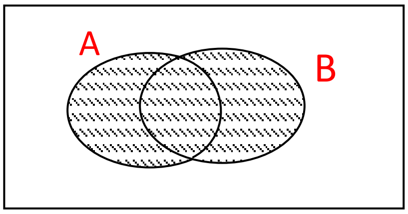
مثال : در هر نمودار (ون) مجموعه خواسته شده را هاشور بزنید.



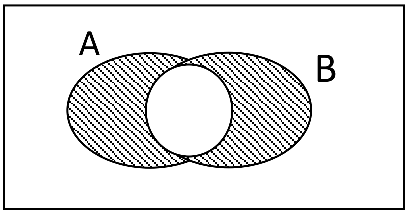
A'



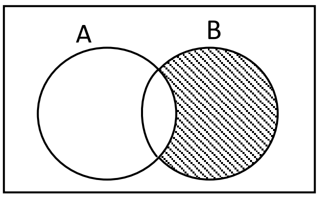
A∩B



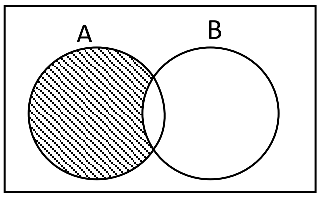
AUB



A△B



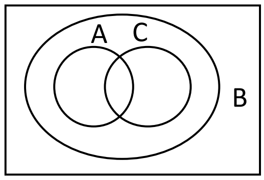
B-A



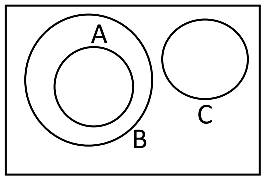
A-B

مثال : برای مجموعه نا تهی A و B و C با شرایط داده شده نمودار (ون) رسم کنید؟

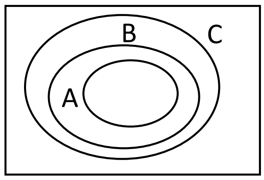
۱. $A \leq B \ , C \leq B \ , A \cap C = \emptyset$



۲. $A \leq B \ , C \subseteq B \ , A \cap C = \emptyset$



۳. $A \subset B \ , B \subset C \ , A \neq B \neq C$



مثال: اگر مجموعه U مرجع باشد مجموعه های زیر را تعیین کنید؟

$U = \{ a,b,c,d,e,f,g,h \}$ $A = \{ a,b,c,d,e \}$ $B = \{ a,c,e,g \}$ $C = \{ b,e,f,g \}$

1. $A \cup B = \{ a,b,c,d,e,f,g \}$
2. $C - B = \{ b, f \}$
3. $A' = \{ f,g,h \}$
4. $A' - B = \{ f,h \}$
5. $B \cap A = \{ a, c, e \}$
6. $B' \cup C = \{ b, d,f,h,e,g \}$

1. $(A - C)' = \{ a, c,d \} = \{ b,c,f,g,h \}$
2. $(A - B')' = B' = \{ a,b,c,d,e \} - \{ b,d,f,h \} = \{ a,c,e \}' = \{ b,d,f,g,h \}$
3. $(A \cap A')' = \{ \} = \{ a,b.c,d,e,f,g,h \}$
4. $U' = \{ \}$
5. $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ یا $A \cup B - A \cap B = \{ a,b,c,d,e,g \} - \{ a,c,e \} = \{ b,d,g \}$

مجموعه توانی

اگر A یک مجموعه نا تهی باشد مجموعه همه زیر مجموعه های A را مجموعه توانی A می گوییم و آن را با P(A) نشان می دهیم

تذکر: هر مجموعه n عضوی 2n عضو دارد.

مثال: مجموعه توانی مجموعه A را بنویسید؟

$A = \{ a,b,c \} = 2^3 = 8 \Rightarrow \{ \} \{ a,b,c \},\{ a \},\{ b \} \{ c \},\{ a,b \},\{a,c \},\{ b,c \}$

مثال۱: درستی یا نادرستی گزینه های زیر را تعیین کنید؟

$A = \{ a,\{b\},\{a,b\},\{\{a,b,c\}\}\}$

$a \in A$ درست　　$\{ b \} \notin A$ غلط　　$\{\{a,b \}\} \leq A$ درست　　$\{\{a,b,c\}\} \in A$ درست

$\{ \{\{a,b,c\}\}\} \subseteq A$ درست　　$\{ a \} \nleq A$ غلط　　$\emptyset \leq A$ همواره درست　　$A \leq A$ همواره درست

مثال۲: درستی یا نادرستی گزینه های زیر را تعیین کنید؟ $B = \{ a,b,c \}$

$\{a,b \} \leq B$ درست　　$\{a,b,c\} \nleq B$ غلط　　$a \in B$ درست　　$C \notin B$ غلط

$d \notin B$ درست　　$\{a,d \} \leq B$ غلط　　$\{a \} \in B$ غلط

مفهوم بازه

$A = \{ x \mid x \in Z \ -4 < x < +2 \} \Rightarrow \{ -3,-2,-1,0,1 \}$

$B = \{ x \mid x \in IR \ \ 0 < x < 2 \} \Rightarrow (0,1)$

$A = \{ x \mid a \leq x \leq b\} \Rightarrow [a,b]$ بازه بسته

$B = \{ x \mid a < x \leq b\} \Rightarrow (a,b]$ بازه نیمه

$C = \{ x \mid a \leq x < b\} \Rightarrow [a,b)$ یا $[a,b [$ بازه نیمه

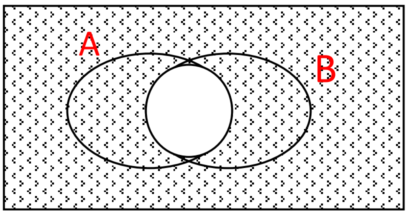
$A = \{ x \mid a < x < b\} \Rightarrow (a,b)$ بازه　　　$(-\infty , +\infty)$ همیشه بصورت بازه می باشد

کل اعداد حقیقی $(-\infty , +\infty) = IR$

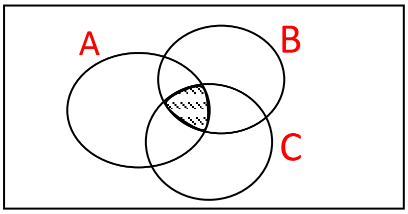
1. $A = \{ a \mid 2 \leq a < 5\} = [2,5)$
2. $B = \{ x \mid x < 1\} \Rightarrow (-\infty,1)$
3. $C = \{ x \mid x \geq -4\} \Rightarrow [-4,+\infty)$
4. $d = \{ x \mid -1 < x < 2\} \Rightarrow (-1,2)$
5. $e = \{ x \mid 0 < x \leq 15\} \Rightarrow (0,15]$

مثال : برای هر یک از تصاویر زیر نمودار (ون) رسم کنید؟

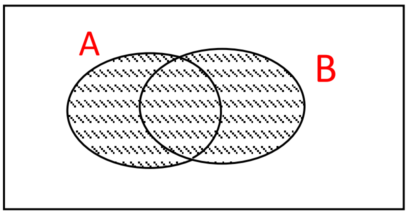
1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$



2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$



3. $A \cup (B - A) = A \cup B$



معادله

حل معادلات درجه اول:

معادلات درجه دوم به فرم کلی $ax + b = 0$ مشخص می شوند که a و b در آنها عدد و x متغیر است و منظور از حل معادله پیدا کردن مقداری برای x است که در معادله صدق کند.

$ax + b = 0$ $\quad -2x + 1 = 0$ $\qquad 2x + 1 = 0$

$ax = -b$ $\quad x = -\frac{1}{2}$ $\qquad 2X = -1$

$X = -\frac{b}{a}$ $\qquad 2(-\frac{1}{2}) + 1 = 0$

هر معادله به اندازه توان متغیر می تواند جواب داشته باشد . چون توان x یک می باشد حداکثر ۱ جواب دارد.

مثال ۱:

$\frac{3x}{2} - \frac{1}{3} = 6 \quad 2x - 2 = 36 \quad x = +2 + 36 \quad 9x = 38 \quad x = \frac{38}{9}$

مثال ۲:

$4x - \frac{2}{5} = \frac{3x}{2} + 1 \qquad 10\left(\frac{4}{1}x - \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3x}{2} + \frac{1}{10}\right)10 \qquad 40x - 4 = 15x + 10$

$40x - 15x = 4 + 10 \quad 25x = 14 \quad x = \frac{14}{25}$

حل معادلات درجه دوم:

از چند طریق می توان این معادلات را حل کرد:

۱. مربع کامل کردن
۲. روش تجزیه
۳. روش Δ

صورت کلی معادلات درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ می باشد. برای حل این معادله به روش Δ ابتدا مقدار Δ را تعیین می کنیم سپس با استفاده از فرمولهای داده شده در زیر جواب معادله را مشخص می کنیم.

اول به حالت مرتب شده در می آوریم.

$\Delta > 0 \rightarrow$ مثبت باشد (دو جواب حقیقی دارد) $X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0 \rightarrow$ (یک جواب دارد) $X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta < 0 \rightarrow$ (معادله جواب ندارد)

مثال:

$X^2 - 5x + 6 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$ $X_{1,2} = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $X_1 = \frac{+5+1}{2} = 3$ اولین جواب $X_2 = \frac{+5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ دومین جواب	$2X^2 - 4x + 4 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4)$ $\Delta = 16 - 16 = 0$ $X_{1,2} = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $X_{1,2} = \frac{4+0}{2} = 2$ یک جواب دارد	$-2X^2 - 3x - 5 = 0$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \\ c = -5 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-3)^2 - 4(-2)(-5)$ $\Delta = -9 - 40 = -31$ $-31 < 0$ جواب ندارد
$X^2 + x - 1 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ $X_{1,2} = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 3$ اولین جواب $X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2}$ دومین جواب	$X^2 + 6x - 9 = 0$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -9 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 36 - 4(-1)(-9)$ $\Delta = 36 - 36 = 0$ $X_{1,2} = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $X_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$ یک جواب دارد	$2X + x + 3 = 0$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 1 - 4(2)(3)$ $\Delta = 1 - 24 = -23$ $-23 < 0$ جواب ندارد

مثال دیگر:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{14}{x^2-1} \qquad \frac{x^2-x+2}{x^2-1} = \frac{14}{x^2-1} \qquad = x^2 - x + 2 = 14$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(2)$

$$X_{1,2} = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$X_1 = \frac{1+\sqrt{-7}}{2} = \frac{1}{2}$$

☑ تمرین در منزل (۱)

1. $X^3 - 4x + 1 = 0$
2. $3X^2 - x = 0$
3. $4X^2 - 81 = 0$
4. $\sqrt{5}X^2 - \sqrt{3}x + 6 = 0$
5. $\frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{1}{x+3}$
6. $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{8}{3}$
7. $X + \frac{3}{x} = 4$

☜ (حل تمرین در آخر جزوه)

یادآوری : اتحاد جهت تجزیه

اتحاد های پر کار:

۱. اتحاد نوع اول
۲. اتحاد نوع دوم
۳. اتحاد مزدوج
۴. اتحاد جمله مشترک
۵. اتحاد چاق و لاغر

(اتحاد نوع اول) $= (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(اتحاد نوع دوم) $= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(اتحاد مزدوج) $= (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

(اتحاد جمله مشترک) $= (x + b)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(اتحاد چاق و لاغر) $= (a - b) = (a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)$

(اتحاد چاق و لاغر) $= (a + b) = (a^2 - ab + b^2) = (a^3 - b^3)$

مثال های انواع اتحاد:

1. $(4x + a)^2 = 16x^4 + 8x^2 + a^2$ نوع اول
2. $(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12x + 4y^2$ نوع دوم
3. $(3x + 2y)(3x - 6y) = 9x^2 - 4y^2$ اتحاد مزدوج
4. $(3x - \frac{1}{2} b)(3x + \frac{1}{2} b) = 9a^2 - \frac{1}{4} b^2$ اتحاد مزدوج
5. $(y - 3)(y + 5) = y^2 + 3y - 15$ اتحاد جمله مشترک
6. $(2x - 1)(2x + 6) = 4x^2 + 10x - 6$ اتحاد جمله مشترک
7. $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) = 27^3 - 1$ اتحاد چاق و لاغر
8. $(x - 2)(x^2 + 2x + 1) = x^3 - 8$ اتحاد چاق و لاغر
9. $(2a - b^2)(2a + b^2) = 4a^2 - b^4$ اتحاد مزدوج
10. $(x - y)(x + y) = x^2 + y^2$ اتحاد مزدوج
11. $(\frac{1}{2} x - 4)(\frac{1}{2} x + 1) = (\frac{1}{2} b)^2 - 3(\frac{1}{2} x) - 4 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} x - 4$ اتحاد جمله مشترک
12. $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ اتحاد جمله مشترک
13. $(2y - 1)(2y + 3) = 4y + 4y - 3$ اتحاد جمله مشترک

حل معادلات درجه دوم با استفاد از تجزیه

برای حل معادله به روش تجزیه از فاکتور گیری ، اتحاد جمله مشترک و در صورت لزوم از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم به این منظور که مجموع یک عبارت را به حاصلضرب چند عامل تبدیل می کنیم و سپس با مساوی صفر قرار دادن هر یک از عوامل مقدار x را تعیین می کنیم.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Longrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \quad \begin{cases} x - 2 = 0 \quad x = 2 \\ x - 3 = 0 \quad x = 3 \end{cases}$$

مثال:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow (x-5)(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x - 5 = 0 \quad x = 5 \\ x + 1 = 0 \quad x = -1 \end{cases}$$

مثال:

$x2 + 5x + 6 = 0$ $(x+2)(x+3) = 0$ $x + 3 = 0 \quad x = -3$ $x + 1 = 0 \quad x = -1$	$x^3 - x^2 - 42x = 0$ $x(x2 - x - 42) = 0$ $(x-7)(x+6) = 0$ $x - 7 = 0 \quad x = 7$ $x + 6 = 0 \quad x = -6$	$x^2 - 5x - 14 = 0$ $(x-2)(x+7) = 0$ $x - 2 = 0 \quad x = 2$ $x + 7 = 0 \quad x = -7$
$x^2 + 6x - 35 = 0$ $(x+7)(x-5) = 0$ $x - 5 = 0 \quad x = 5$ $x + 7 = 0 \quad x = -7$	$x^2 - 4 = 0$ $(x-2)(x+2) = 0$ $X^2 = 4 \quad x = \pm 2$	$9x^2 - 81 = 0$ $9x^2 = 81$ $X^2 = 9 \quad x^2 = \pm 3$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $(x-1)(x-1) = 0$ $x^2 = \pm 1$

معادلات دو مجذوری

برای حل معادلات دو مجذوری در فرم $ax^4 + bx^2 + c = 0$ یا $ax^6 + bx^3 + c = 0$ با یک تغییر به این صورت که توان کمتر x را تغییر داده و معادله را دوباره بر حسب آن بازنویسی می کنیم. می توانیم تبدیل به یک معادله درجه دوم می کنیم و با حل این معادله و پیدا کردن ریشه های آن و جایگزین کردن آنها در تغییر متغیر داده شده ریشه های معادله اصلی را پیدا می کنیم .

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad x^2 = y \Rightarrow \quad ay^2 + by + c = 0$$

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \quad x^3 = y \Rightarrow \quad ay^2 + by + c = 0$$

مثال:

1. $3x^4 - 8x^2 + 5 = 0 \quad x^2 = y \Rightarrow \quad 3y^2 - 8y + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad 64-60 = 4 \quad \Delta = 4$

$y_1 = \frac{8+\sqrt{4}}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ جواب اول $y_2 = \frac{8-\sqrt{4}}{6} = 1$ جواب دوم

$$x^2 = y \begin{cases} x^2 = 1 & x = \pm 1 \\ x^2 = \frac{5}{3} & x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

2. $x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \quad x^2 = y \Rightarrow \quad y^2 - 5y - 6 = 0 \implies (y-6)(y+1) = 0$

$$\begin{matrix} y_1 = 6 \\ y_2 = -1 \end{matrix} \begin{cases} x^2 = 6 & x = \pm\sqrt{6} \\ x^2 = -1 & x = \pm\sqrt{-1} \end{cases}$$

غیر قابل قبول

3. $3x^6 + 7x^3 + 2 = 0 \quad x^3 = y \Rightarrow \quad 3y^2 + 7y + 2 = 0$

4. $X^5 - x^4 - x^3 = 0 \Rightarrow \quad x^2(x^4 - x^3 - x^2) \Rightarrow \quad x^2 = y \Rightarrow \quad y^2 - y = 0$

5. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \quad x^3 = y \Rightarrow \quad y^2 - 9y + 8 = 0 \Rightarrow \quad (y-8)(y-1) = 0$

$$\begin{matrix} y_1 = 1 \\ y_2 = 8 \end{matrix} \begin{cases} x^3 = 1 & x = 1 \\ x^3 = 8 & x = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = 2 \end{cases}$$

6. $(x^2-1)^4-3(x^2-1)^2+2=0 \Longrightarrow y=(x^2-1)^2 \Longrightarrow \quad y^2-3y+2=0 \quad (y-1)(y-2)=0$

$y_1 = 1$: $(x^2-1)^2=1 \Rightarrow x^2-1=0 \qquad x^2=1 \quad x=\pm1$

$x=\pm1$: $x^2-1=1$ → $x=2$, $x=\pm\sqrt{2}$; $x^2-1=-1$ → $x^2=0$, $x^2=0$

$y_2 = 2$: $(x^2-1)^2=2 \Rightarrow x^2-1=\pm\sqrt{2}$

$x^2=+\sqrt{2} = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$

$x^2=-\sqrt{2} = -\sqrt{2+1}$ منفی جواب ندارد

تعیین علامت عبارتهای جبری

اگر یک عبارت جبری به فرم کلی $P = ax + b$ داشته باشیم برای تعیین علامت این عبارت از جدول زیر استفاده می کنیم .

$p: ax+b \quad \Rightarrow ax+b=0 \quad \Longrightarrow x=\frac{-b}{a}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
p	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

مثال ۱:

$a+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4$

1. $X=1 \quad \to 5$
2. $X=3 \quad \to 3$
3. $X=-5 \quad \to -1$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
p	------------------	0	+++++++++

مثال ۲:

$P: 2-\frac{1}{2}X \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x-2=0$

$X=\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
p	++++++++++++++	0	-----------------------

❖ تذکر:

در صورتی که بخواهیم یک عبارت جبری که بصورت حاصلضرب چند عامل را تعیین می کنیم و هر عامل را جداگانه تعیین علامت کرده و حاصلضرب علامتها، علامت کل عبارت را مشخص می کنیم.

p: $(2x+1)(3-x)(6-3x)$

$P_1 = (2x+1) \Rightarrow \frac{-1}{2}$

$P_2 = (3-x) \Rightarrow 3$

$P_3 = (6-3x) \Rightarrow 2$

x	-∞		$\frac{-1}{2}$		2		3		+∞
P_1		--------	‖ 0	+++++		++++++		++++++	
P_2		+++++		+++++		+++++	‖ 0	--------	
P_3		+++++		+++++	‖ 0	--------		--------	
P		--------	‖ 0	+++++	‖ 0	+++++	‖ 0	--------	

مثال:

p: $\frac{(x+1)}{(x-1)} = 0$

$P_1 = (x+1) \Rightarrow x = -1$

$P_2 = (x-1) \Rightarrow x = 1$

∦ 0 تعریف نشده می باشد

x	-∞		-1		1		+∞
P_1		--------	‖ 0	++++++		++++++	
P_2		--------		--------	‖ 0	++++++	
P		++++++	‖ 0	--------	∦ 0	++++++	

❖ تذکر:

بری تعیین علامت کردن یک عبارت جبری اگر توان دوم (زوج) بیرون از پرانتز که آن عامل همواره مثبت است و اگر توان فرد بیرون از پرانتز باشد آن را نادیده می گیریم و خود عامل را تعیین علامت می کنیم.

مثال:

p: $\frac{(3-x)^2}{(x+1)^3} = 0$

$P_1 = 3$

$P_2 = -1$

x	-∞		-3		3		+∞
P_1		++++++	‖ 0	++++++		++++++	
P_2		--------		++++++	‖ 0	++++++	
P		--------	∦ 0	++++++	‖ 0	++++++	

تعیین علامت عبارتهای درجه دوم

یک عبارت درجه دوم را با توجه به تعداد ریشه های آن به ۳ صورت زیر تعیین علامت می کنیم.

$P : ax^2 + bx + c = 0$

1. $\Delta > 0 \Rightarrow x_1$ و x_2

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
P		موافق علامت a	‖ 0	مخالف علامت a	‖ 0	موافق علامت a	

2. $\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
p		موافق علامت a	‖ 0	مخالف علامت a	

3. $\Delta < 0 \Rightarrow$ ریشه ندارد

x	$-\infty$	به ازاء جمیع مقادیر	$+\infty$
p		موافق علامت a	

مثال ۱:

$P : x^2 + 9x + 8 = 0 \quad \Rightarrow p: (x + 1)(x + 8)$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 9 \\ c = 8 \end{array}\right\} \Delta = 81 - 32 \quad \Delta = 49 \qquad x_1 = \frac{-9-7}{2} = -8 \qquad x_2 = \frac{-9+7}{2} = -1$$

x	$-\infty$		-8		-1		$+\infty$
P		++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++	

مثال ۲:

$P : x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Rightarrow p: (x + 1)(x + 8)$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \end{array}\right\} \Delta = 36 - 36 \quad \Delta = 0 \qquad x = \frac{\frac{6}{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
P		++++++	‖ 0	++++++	

مثال ۳:

$P: 2x^2 - x + 7 = 0 \quad \Rightarrow p: (x+1)(x+8)$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 7 \end{array}\right\} \quad \Delta = 1 - 56 \quad \Delta = -55$$

$\Delta < -55 \Rightarrow$ ریشه ندارد

x	$-\infty$	به ازاء جمیع مقادیر	$+\infty$
P	++++++	++++++	++++++

مثال۴:

$p: \left(\frac{2x-1}{-x+1}\right)\left(\frac{x^2-1}{-x^2+2}\right) = 0$

$P_1 = (2x - 1) \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$P_2 = (-x + 1) \quad \Rightarrow x = 1$

$P_3 = (x^2 - 1) \quad \Rightarrow x = \pm 1$

$P_4 = (-x^2 + 2) \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
P_1	-----	----	----		----	‖ 0	+++		+++	+++	++++
P_2	++++	+++	+++		+++	+++	+++	‖ 0	----	----	-----
P_3	++++	+++	+++	‖ 0	----	----	----	‖ 0	+++	+++	++++
P_4	-----	‖ 0	+++		+++	+++	+++		+++	‖ 0	++++
P	++++	∦ 0	----	‖ 0	+++	‖ 0	----	∦ 0	----	∦ 0	++++

∦ 0 ریشه های مخرج تعریف نشده است تعریف نشده می باشد

✓ تمرین مهم

$$p: \frac{3(4x+5) + (2x-5)(4x+5)}{(x^2+4)}$$

ابتدا از $(4x+5)$ فاکتور می گیریم

$$\frac{(4x+5)+(3+2x-5)}{(x^2+4)} \Rightarrow \frac{(4x+5)+(2x-2)}{(x^2+4)}$$

$P_1 = (4x + 5) \quad \Rightarrow x = \frac{-5}{4}$

$P_2 = (2x - 2) \quad \Rightarrow x = 1$

$P_3 = (x^2 + 4) \quad \Rightarrow$ همواره مثبت است

x	$-\infty$	$\frac{-5}{4}$		1	$+\infty$
P_1	--------	‖ 0	++++++		++++++
P_2	--------		--------	‖ 0	++++++
p	++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++

نا معادلات جبری

منظور از حل یا تعیین علامت یک نا معادله این است که مقادیری برای X تعیین کنیم بطوری که به ازاء آن مقادیر عبارت جبری مورد نظر مثبت یا منفی شود.

مثال : نامعادلات زیر را تعیین علامت کنید؟

$$X^2 \geq 4 \qquad X^2 - 4 \geq 0$$

$$X^2 = \pm 2$$

x	-∞	-2		+1	+∞
P	++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++

م.ج (-∞,-2] ∪ [+1,+∞)

مثال ۲:

$$\frac{X-7}{X+3} < 2 \qquad \frac{X-7}{X+3} - 2 < 0$$

$$\frac{X-7-2X-6}{(X+3)} < 0 \qquad \frac{-X-13}{X+3} < 0$$

$P_1 = X = -13$

$P_2 = X = -3$

x	-∞	-13		-3	+∞
P_1	++++++	‖ 0	--------		--------
P_2	--------		--------	‖ 0	++++++
p	--------	‖ 0	++++++	∦ 0	--------

(-∞,-2] ∪ [+1,+∞)

م.ج (-∞,-13) ∪ (-3,+∞)

دستگاههای معادلات و نامعادلات

منظور از حل دو معادله دومجهولی در یک دستگاه پیدا کردن مقادیری برای X و y که در هر دو معادله صادق باشد.

مثال:

$$\begin{cases} 2X + 3y = 5 \\ X - 5y = 1 \end{cases} \quad -2$$

$$-2X + 10y = -2$$

$$13y = 3$$

$$y = \frac{3}{13} \qquad X = \frac{28}{13}$$

$$X - 5\left(\frac{3}{13}\right) = 1$$

$$X - \frac{15}{13} = 1$$

$$X = 1 + \frac{15}{13} = \frac{28}{13}$$

مثال ۲:

$$-3\begin{cases} X - 2y = 2 \\ 3X + 4y = 6 \end{cases}$$

$-3X + 6y = -6$

$10y = 0$

$y = \frac{0}{10} = 0 \qquad X = 2$

$X - 2(0) = 2$

$X - 0 = 2$

مثال ۳:

$$\begin{matrix} -4 \\ 5 \end{matrix}\begin{cases} 4X + 5y = 10 \\ 5X + 4y = 8 \end{cases}$$

$-16X - 20y = -40$

$25X + 20y = 40$

$9X = 0 \qquad X = 0$

$25(0) + 4y = 8$

$0 + 4y = 8 \qquad y = 2$

مثال ۴:

$$-1\begin{cases} X^2 + y^2 = 10 \\ (X-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$-X^2 - y^2 = -1$

$(X-1)^2 + y^2 = 1$

$-X^2 + (X-1)^2 = 0$

$-X^2 + X^2 - 2X + 1 = 0$

$-2X + 1 = 0$

$-2X = -1 \qquad X = \frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2})^2 + y]^2 = 1$

$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad y = \sqrt[2]{\frac{3}{2}}$

مثال ۵ تعیین علامت ومجموعه جواب:

$$\begin{cases} 1): \ (3X - 15)(-X + 1) < 0 & x=5 \ , \ x=1 \\ 2): \ X^2 - 9 \geq 0 \qquad X^2 - 9 = 0 \qquad X^2 = 9 & X = \pm 3 \end{cases}$$

x	-∞	1		5	+∞
P_1	--------		--------	‖ 0	++++++
P_2	++++++	‖ 0	--------		--------
p	--------	‖ 0	++++++	‖ 0	--------

x	-∞	-3		3	+∞
P_1	++++++	‖ 0	--------		++++++
p	++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++

م.ج (-∞,1) ∪ (+5,+∞)

م.ج (-∞,-3] ∪ [+3,+∞)

م.ج (-∞,3) ∪ (+5,+∞)

مثال ۶ تعیین علامت ومجموعه جواب:

1): $\frac{(X-1)^2\ (X-3)^2}{(2X+4)^2} \le 0$ $P_1:=(X-1)^2$ x=-1 $P_2:=(X-3)^3$ x=3 $P_3:=(2X+4)^2$ x=-2

2): $\frac{3X-5}{X} < 1$ $\frac{3X-5}{X}-1 < 0$ $\frac{(3X-5)-x}{x} < 0$ $\frac{2X-5}{X} < 0$ X=$\pm$3

$P_1:=(2X-5)$ x=$\frac{5}{2}$ $P_2:=$ x=0

x	-∞	−2		−1		3	+∞
P_1	+++++		+++++	‖ 0	++++++		++++++
P_2	--------		--------		--------	‖ 0	++++++
P_3	+++++		+++++	‖ 0	+++++		+++++
P	--------	∦ 0	--------	‖ 0	--------	‖ 0	+++++

همواره مثبت است

همواره مثبت است

م.ج(-∞,-2) ∪ (-2,+3]

x	-∞	0		$\frac{5}{2}$	+∞
P_1	--------		--------	‖ 0	++++++
P_2	--------	‖ 0	++++++		++++++
p	++++++	∦ 0	--------	‖ 0	++++++

م.ج (0,$\frac{5}{2}$]

توابع

زوج مرتب

تعریف زوج مرتب: به دوتایی هایی که ترتیب قرار گرفتن مولفه ها در آنها مهم است را گویند و در زوج مرتب a,b مولفه اول مربوط به X و مولفه دوم مربوط به y است . بنابراین مثال

{1,2} (a,b) ≠(b,a)

{2,1} (2,1)≠(1,2)

حاصلضرب دکارتی دومجموعه

اگر A,B دو مجموعه ناتهی باشند حاصلضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \ \& \ b \in B \} \qquad \Rightarrow \qquad A \times B \neq B \times A$

مثال:

$A = \{ a,b,c \} \qquad B = \{ 1,2 \}$

$A \times B = \{ (a,1)(a,2)(b,1)(b,2)(c,1)(c,2) \}$

$B \times A = \{ (1,a)(1,b)(1,c)(2,a)(2,b)(2,c) \}$

$A \times A = \{ (a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)(c,c) \}$

$B \times B = \{ (1,1)(1,2)(2,1)(2,2) \}$

تعریف رابطه

هر زیر مجموعه از حاصلضرب دکارتی دو مجموعه را یک رابطه می گویند.

$R = \{ (1,2)(3,4)(5,4)(0,0) \}$

$1 R 2 \qquad 3R4 \qquad 4 \not R 3 \qquad 0R0$

تعریف تابع

رابطه R را یک تابع می گوییم.هرگاه در آن هیچ زوج مرتبی با مولفه اول مساوی و مولفه دوم نامساوی وجود نداشته باشد.

برای مختصر نوشتن یک تابع بجای نوشتن زوج های مرتب یک تابع دامنه و برد آن را توصیف و قانون بین مولفه اول و دوم از زوجها را می نویسیم که به این *قانون ضابطه تابع* می گوییم.

دامنهf : ورودی A به $\longrightarrow$ B خروجی $y = f(x)$ $= X + 2$

$g : N_1 = \mu_1 \qquad f(1) = 1+2 = 3 \quad (1,3) \qquad f(2) = 2+2 = 4 \quad (2,4)$

مثال: هر کدام از توابع زیر را به صورت زوجهای مرتب بنویسید؟

$f : \{ (x,y) \mid X \in Z \ , y = X^2 \} \qquad g : \{ (x,y) \mid X \in \{0,1,2,3\} \ y = 2x - 5 \}$

$f(-1) = (-1)^2 \Longrightarrow (-1,1) \qquad f(0) \Longrightarrow (0,5)$

$f(1) = (-1)^2 \Longrightarrow (1,1) \qquad f(1) \Longrightarrow (1,-3)$

$f(2) = (-1)^2 \Longrightarrow (2,4) \qquad f(2) \Longrightarrow (2,-1)$

تعیین تابع بودن یک رابطه با استفاده از ضابطه آن

اگر بخواهیم با استفاده از ضابطه مشخص کنیم اگر یک تابع است یا نه باید معادله بر حسب y حل می کنیم . اگر به ازاء هر ورودی فقط یک خروجی داشته باشیم ضابطه مورد نظر تابع است در غیر این صورت تابع نیست.

مثال : کدام یک از رابطه زیر تابع است؟

$R_1 = \{ (\underline{2},3)(\underline{3},4)(\underline{4},5)(\underline{5},6) \}$ تابع است (اولی یک باشد و دومی یکی نباشد)

$R_2 = \{ (\underline{0},1)(\underline{0},2)(\underline{0},3)(\underline{4},5) \}$ تابع نیست

$R_3 = \{ (\underline{1},2)(\underline{5},2)(\underline{3},4)(\underline{7},4)(\underline{8},5) \}$ تابع است

$R_4 = \{ (1,1) \}$ همیشه تابع است

مثال : کدام یک قوانین زیر مربوط به یک تابع است؟

$X^2 + y^2 = 4 \quad y^2 = 4 - X^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} \quad x = 0 \quad \Rightarrow X = 2\ ,\ X = -2$ تابع نیست

$2X^2 + y = 5 \quad y = 5 - 2X^2$ تابع

$| -5x + 2 | = 2y \quad y = \frac{|-5x+2|}{2}$ تابع

$X - 3 = | y | \qquad y = \pm (x-3)$ تابع نیست

$X^2 + y^2 = 0$ همیشه $|y|$ و توان زوج تابع نیست

دامنه تعریف تابع

منظور از تعیین دامنه یک تابع مشخص کردن قسمتهایی از اعداد حقیق است که اجازه داریم ورودی های تابع (x ها) را از این مناطق انتخاب کنیم . به عبارت دیگر دامنه از تعریف یک تابع مقادیری برای x است که به ازاء آنها خروجی های تابع تعریف شده باشند. برای تعیین دامنه توابع آنها را دسته بندی می کنیم و روش تعیین دامنه را برای هر کدام را بررسی می کنیم.

۱. دامنه توابع چند جمله ای

دامنه توابع چند جمله ای برابر با کل اعداد حقیقی (R) می باشد . توابع چند جمله ای به فرم زیر می باشند.

$D = R$

$F(x) = anx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + ax + a_.$ که توانها همگی اعداد طبیعی هستند

$F(x) = 5x^6 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^1$ تابع خطی است و دامنه آن کل اعداد حقیقی می باشد

$g (x) = \sqrt{5}x^{10} - 2x + 4 \qquad = R$

$k(x) = x^{-2} + x^3$ نیست

$h(x) = 5x^{-3} + 4$ نیست

۲. توابع کسری

دامنه توابع کسری یعنی آنهایی که صورت و مخرج کسر هر دوچند جمله ای هستند برابر است با همه اعداد حقیقی بجز اعدادی که ریشه مخرج هستند.

$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-4}$ $\quad 2x-4 \quad x = \frac{4}{2} \quad x = 2 \quad D_f = R - \{2\}$

$g(x) = \frac{3x-4}{x^2-9}$ $\quad x^2 = 9 \quad x = \pm 3 \quad D_g = R - \{\pm 3\}$

$k(x) = \frac{3}{x} \quad D_k = R - \{0\}$

$g(x) = \frac{7x^{10}-4x^5+1}{x^3-2x} \quad x^3-2x = 0 \quad x(x^2-2) = 0 \quad x = 0 \quad x^2-2 = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$

۳. توابع گنگ

دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد به شرطی که زیر رادیکال چند جمله ای برابر است با کل اعداد حقیقی.

$f(x) = \sqrt[3]{2x-1} \quad D_x = R$

$g(x) = \sqrt[5]{x^9 - 6x^5} + 6 \quad D_g = R$

۱. دامنه توابع رادیکالی

با فرجه زوج به شرطی که زیر رادیکال چند جمله ای باشد برابر است با بازه هایی از اعداد حقیقی که به ازاء آنهاعبارت زیر رادیکال نامنفی شود.

$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad D = R \qquad \sqrt{4} = 2 \quad D = R$

$\sqrt[3]{27} = 3 \quad D = R \qquad \sqrt{-4} = 2$ تعریف نشده است

مثال۱:

$f(x) = \sqrt{3x-6}$

$3x - 6 \geq 0$

$3x = 6$

$X = 2 \quad D = [2,+\infty]$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
P	--------	‖ 0	++++++

$\geq 0 \bullet\!\longrightarrow$

مثال۲:

$g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$x^2 - 9 \geq 0$

$x^2 = 9$

$X = \pm 3$ $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

x	$-\infty$	-3		$+3$		$+\infty$
P	++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++	

مثال۳:

$g(x) = \sqrt[3]{x^{10} + x^9 + 1}$ $D_g = R$

مثال۴:

$k(x) = \sqrt{x^2 - 16x}$

$x^2 - 16x \geq 0$ $x = 0$ $x = 16$

$x(x-16) = 0$ $D = (-\infty, 0] \cup [16, +\infty)$

مثال۵:

$h(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$

$x^2 - 7x + 6 \geq 0$

$(x-1)(x-6)$

$x = 1$ $x = 6$ $D = (-\infty, 1] \cup [6, +\infty)$

x	$-\infty$	1		6		$+\infty$
P	++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++	

مثال۶:

$f(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$ $D_f = R$

مثال۷:

$g(x) = \frac{2}{x-3}$ $x-3=0$ $x = 3$ $D_g = R - \{3\}$

مثال۸:

$k(x) = \frac{x^{10}-5}{x^3-9x}$ $x(x^2 - 9)$ $x = 0$ $x = \pm 3$ $D_k = R - \{0, 3, -3\}$

دامنه توابع ترکیبی

اگر یک تابع ترکیبی از توابع فوق باشد دامنه آن مجموعه مقادیری است که برای تمام انواع تابع تعریف شده باشد .

بنابراین دامنه این تابع برابر خواهد شد با اشتراک دامنه توابع تشکیل دهنده تابع اصلی.

مثال:

$F(x)=\frac{3x-5}{2x+4}-\frac{1}{x}+2X^3+7-\sqrt{X}$ $\qquad D=[0,+\infty]-\{0\}-\{2\}=(0,+\infty)$

مثال۱:

$g(x)=\sqrt{\frac{x+1}{4-x}}$ $\qquad \frac{x+1}{4-x}\geq 0$

$0=\frac{x+1}{4-x}$ $\qquad p_1=x+1$ $\qquad p_1=-1$ $\qquad p_2=4-x$ $\qquad p_2=+4$

x	-∞		-1		4		+∞
P_1		--------	‖ 0	++++++		++++++	
P_2		++++++		++++++	‖ 0	--------	
p		--------	‖ 0	++++++	∦ 0	--------	

$D=[-1,4)$

مثال۲:

$F(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

$F_1=$ $\quad x=1 \quad , \quad x=2$

$D_{F1}=R-\{-1,-2\}$

x	-∞		1		2		+∞
P		++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++	

$F_1=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

$F_2=3-2x-x^2>0$

$F_2=$ $\quad X=-3 \quad x=1$

$D_{F2}=R-\{-3,1\}$

x	-∞		-3		1		+∞
P		--------	‖ 0	++++++	∦ 0	--------	

$F_2=(-3,1)$

$D_F=F_1\cap F_2$ $\qquad D=D_{F1}\cap D_{F2}$ $\qquad (-3,1)$

تمرین

1. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2. $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

3. $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

4. $g(x) = \frac{2x}{x^2-3x+2}$

5. $k(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

6. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-2}$

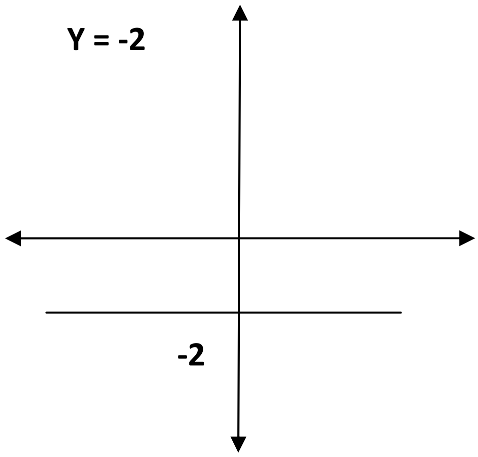
7. $y = \sqrt{\frac{x-2}{x=2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

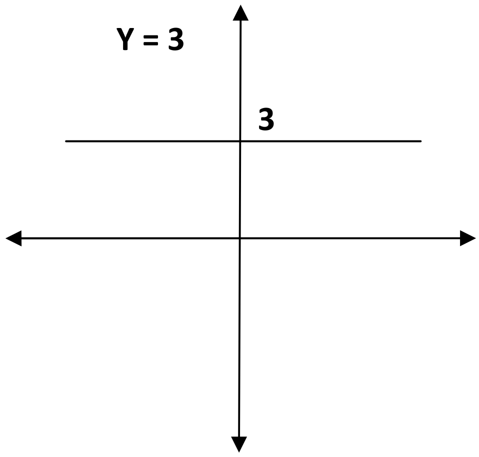
انواع تابع

۱. تابع ثابت :

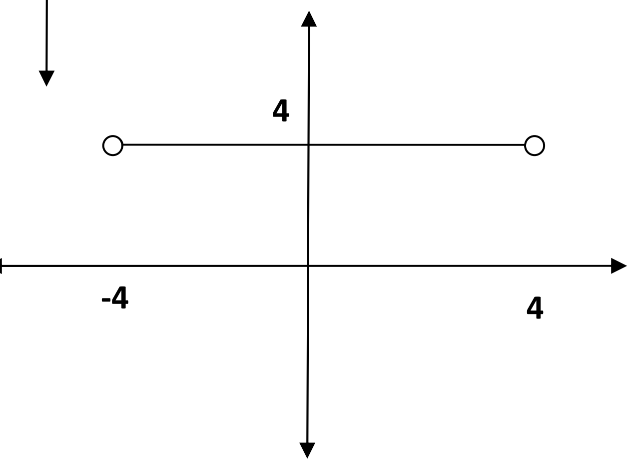
تابع f با ضابطه f(x) = k که k یک عدد حقیقی است یک تابع می گوییم. دامنه این تابع کل اعداد حقیق و برد آن عدد مجموعه تک عضوی k است و نمودار این تابع خطی است موازی محور x ها .

F(x) = -2   D = R $\{ \dots (\frac{-1}{2}, -2)(0,-2)(10,-2)(\sqrt{3},-2)\dots.\}$





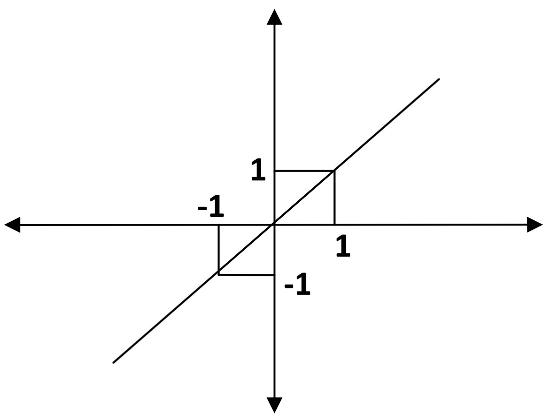
Y = 4   (-4 , +4)



۲. تابع همانی :

ضابطه این تابع بصورت f(x) = x است . دامنه و برد این تابع هر دو R (اعداد حقیقی) باشند و نمودار آن موازی نیمساز ربع اول و سوم است.

D = R   { ... (-1, -1)(1,1)(0,0)....}

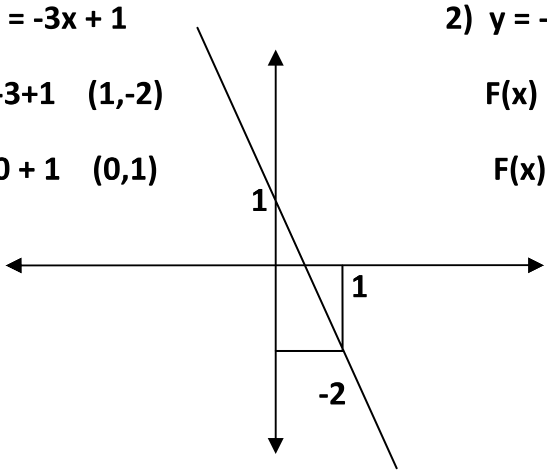


مثال : هر یک از خطوط زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؟

1) $Y = -3x + 1$

$F(x) = -3+1 \quad (1,-2)$

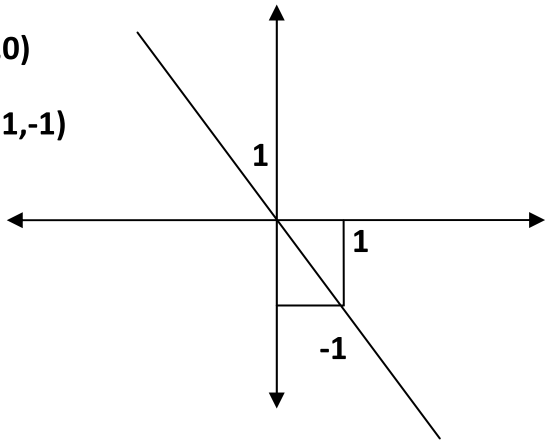
$F(x) = 0 + 1 \quad (0,1)$



2) $y = -x$

$F(x) = 0-x \quad (0,0)$

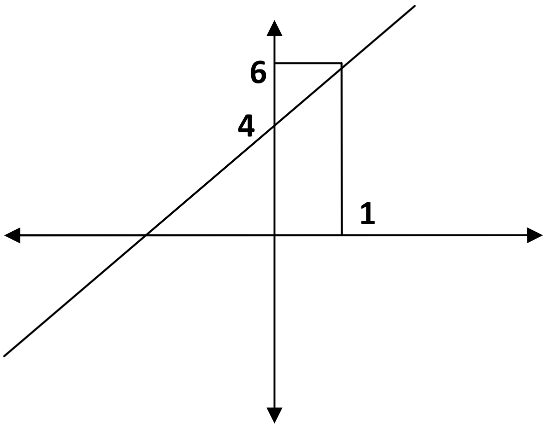
$F(x) = 1 - 1 \quad (1,-1)$



3) $y = 2x + 4$

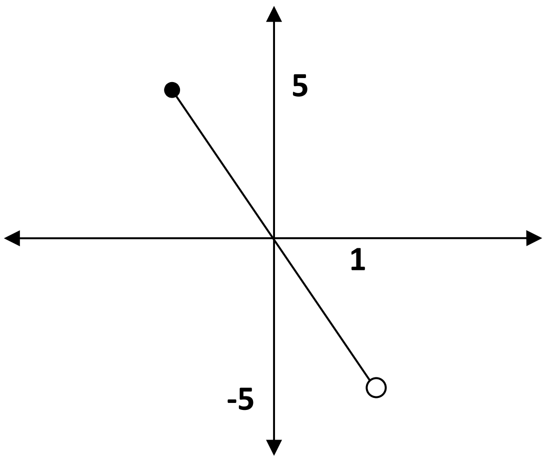
$F(1) = 2+4 \quad (1,6)$

$F(0) = 0 + 4 \quad (0,4)$



مقدار $y = -3x$ را در فاصله $[-5,+5]$ را بدست آورید؟

x	-5	+5
y	+15	-15



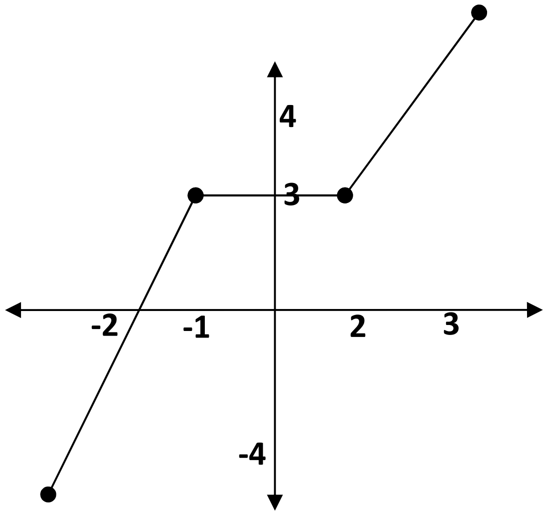
توابع چند ضابطه ای

یک تابع ممکن است از یک ضابطه بیشتر داشته باشد یعنی اعداد حقیق را تقسیم کرده و روی هر زیر مجموعه از اعداد حقیقی یک ضابطه تعریف می کنیم . برای رسم این توابع محور x ها را تقسیم بندی می کنیم و در هر بازه خط مربوط به همان بازه را رسم می کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

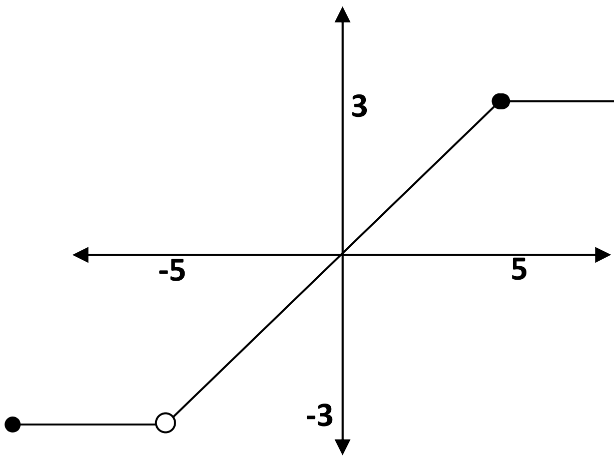
$$F(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \quad \rightarrow F(-3) = 3 \\ 3 & -1 \leq x < 2 \quad \rightarrow f(0) = 3 \\ X + 1 & 2 \leq x \quad \rightarrow f(3) = 4 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	2	3
y	-4	3	3	3	4



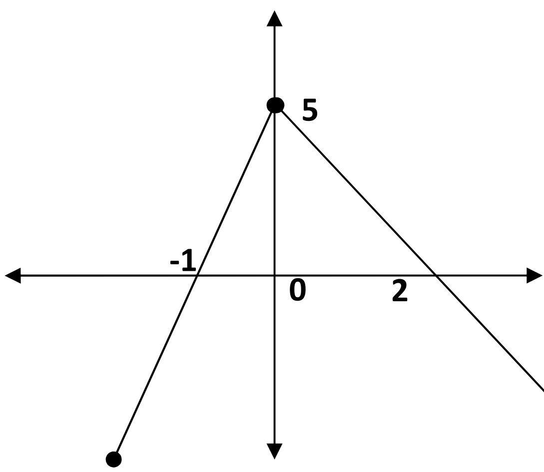
$$y = \begin{cases} -3 & x < -5 \\ +x & -5 \leq x \leq 5 \\ 3 & x > 5 \end{cases}$$

x	-5	0	5
y	-3	x	3



$$y = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 5 & x = 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

x	-1	0	1
y	0	5	2



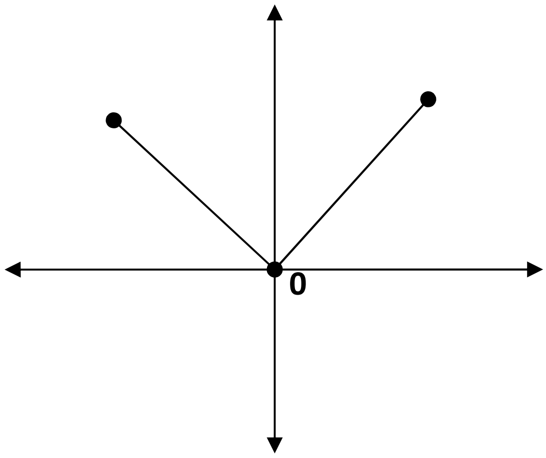
تابع قدر مطلق

تابع F با ضابطه $F(X) = |X|$ با دامنه R و برد $R = [0,+\infty)$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$F(X) = |X| = \begin{cases} X & X \geq 0 \\ -X & X < 0 \end{cases}$$

$|-2| = +2$

$|+2| = +2$



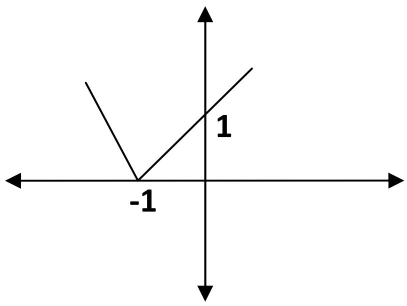
مثال:

نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید:

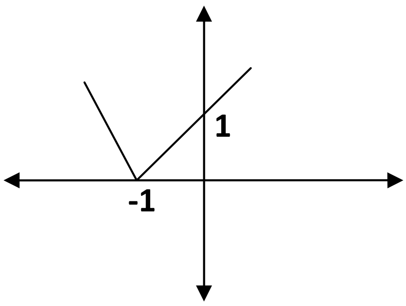
$y = |x+1|$ $\quad$ $y = x+1$

x	0	-1
y	1	0

x		-1	
X+1	---	0	++++



$$y = \begin{cases} -(x+1) & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases}$$



مثال ۲

$Y = |2x-4| + 2$

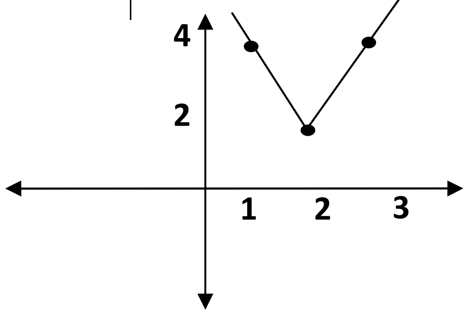
$2x - 4$

$X = 2$

x		2	
p	---	0	++++

x	1	2	3
y	4	2	4

$$y = \begin{cases} -(2x-4) & x < 2 \\ 0+2 & x = 2 \\ 2x-4+2 & x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x+6 & x<2 \\ 2 & x = 2 \\ 2x-2 & x>2 \end{cases}$$



مثال ۳

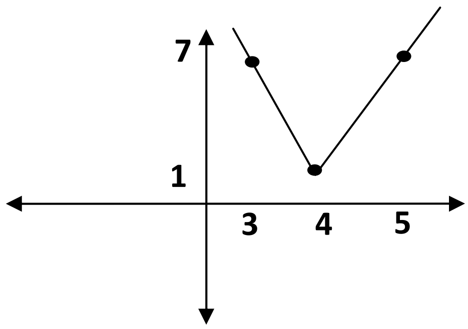
$Y = 3|\ 2x - 8\ | + 1$

$2x - 8$

$X = 4$

x		4	
p	---	0	++++

$$y = \begin{cases} -(2x-4) & x< 2 \\ \mathbf{0+2} & x = 2 \\ 2x - 4+2 & x > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x\,(2x-8)+ 1 & x<4 \\ 3\times 0+1 & x = 4 \\ 3x\,(2x-8)+ 1 & x<4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -6x\ 24+ 1 & -6x + 25 & x<4 \\ 1 & & x = 4 \\ 6x\ -24+1 & -6x - 23 & x<4 \end{cases}$$

x	3	4	5
y	7	1	7

مثال ۴

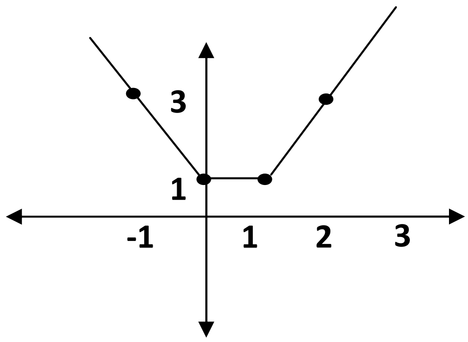
$Y = |\ x\ | + |x - 1|$

x		0	
p	---	0	++++

x		1	
p	+++	0	----

$$y = \begin{cases} -(x)-(x-1) & x< 0 \\ \mathbf{+1} & x = 0 \\ x - (x-1) & x < x < 1 \\ x+ x - 1 & x>1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 1 & x<0 \\ +1 & x = 0 \\ -1 & 0 < x<1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

x	-1	0	1	2
y	3	1	1	3



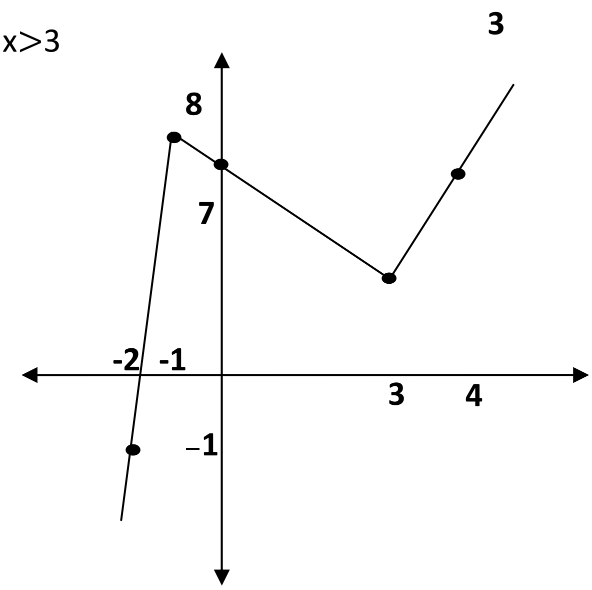
مثال ۵

$Y = 2|\ x - 3\ | + |x + 1|$

x		-1	3	
x-3	---	---	0	++++
X+1	---	0	+++	+++

$$y = \begin{cases} -2(x-3)-(x+1) & x< -1 \\ 8 & x = -1 \\ -2(x-3)(x+1) & -1<x<3 \\ +4 & x = 3 \\ 2(x-3)+(x+1) & x>3 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 5 & x<-1 \\ 8 & x = 1 \\ -x + 7 & -1<x<3 \\ 4 & x = 3 \\ 3x - 5 & x>3 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	3	4
y	-1	8	7	4	7



تابع جزء صحیح (براکت)

تابع جزء صحیح با ضابطه $f(x) = [x]$ با دامنه اعداد حقیقی و برد اعداد صحیح تابعی است که به هر عدد حقیقی عدد صحیح کمتر از آن را نسبت می دهد.

$F(x) = [x] \quad D = R \quad R = Z$

$n \leq x < n + 1 \rightarrow [x] = n$

${}^{-2}[-1,1]^{-1} = -2 \qquad {}^{1}[-1,1]^{2} = 1 \qquad {}^{5}[-1,1]^{6} = 5 \qquad {}^{-5}[-1,1]^{-6} = -6 \qquad {}^{3}[3/8,4]^{4} = 3 \qquad {}^{1}[1,1/999]^{2} = 1$

مثال: نمودار را برای [-3 , 3] رسم کنید.

$[-1,3] \quad f(x) = [x]$

$-3 \leq x < -2 \quad \rightarrow \quad y = -3$

$-2 \leq x < -1 \quad \rightarrow \quad y = -2$

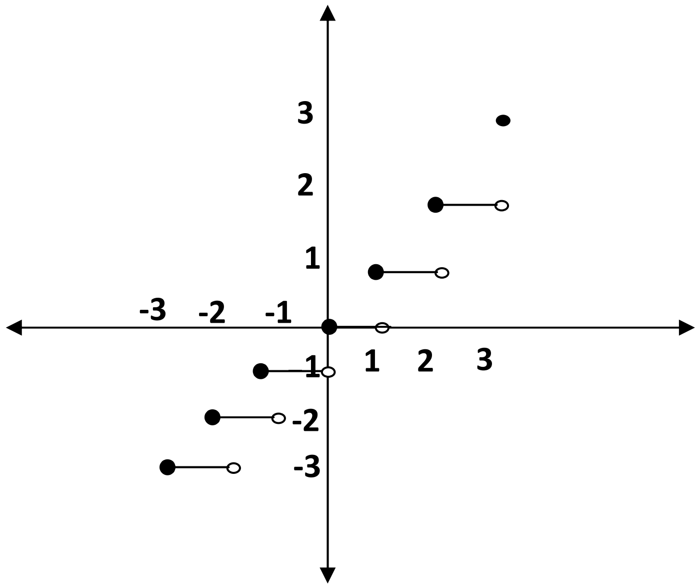
$-1 \leq x < 0 \quad \rightarrow \quad y = -1$

$0 \leq x < 1 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$1 \leq x < 2 \quad \rightarrow \quad y = 1$

$2 \leq x < 3 \quad \rightarrow \quad y = 2$

$x = 3 \quad \rightarrow \quad y = 3$



مثال: تابع $y=[2x]$ روی بازه $(-2 , 2)$ رسم کنید.

$[-2,+2] \quad y = [2x]$

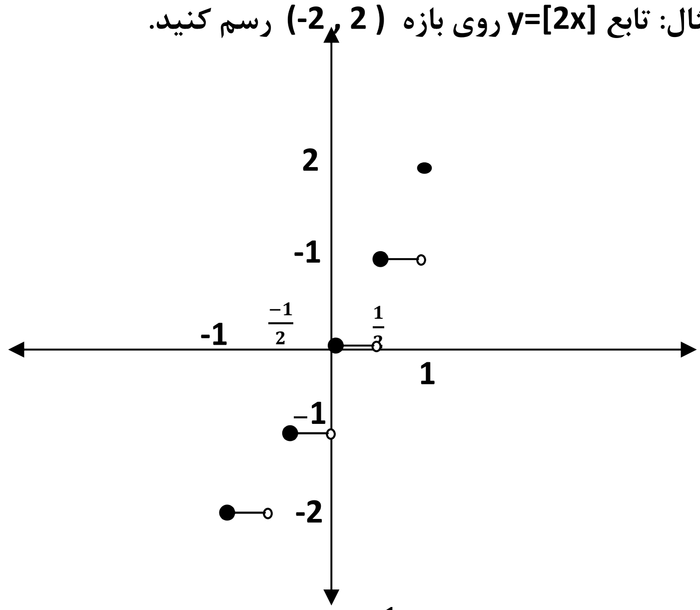
$-2 \leq 2x < -1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-2}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{-1}{2}$

$-1 \leq 2x < 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{2} \leq \frac{2x}{2} < 0$

$0 \leq 2x < 1 \quad \rightarrow \quad y = 0 \leq \frac{2x}{2} < \frac{1}{2}$

$1 \leq 2x < 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \leq \frac{2x}{2} < 1$

$2 = 2x \quad \rightarrow \quad x = 1$



مثال: نمودار جزء صحیح $y = [\frac{1}{2}x]$ روی بازه $(-2 , 2)$ را بدست آورید.

$[-2,+2] \quad y = [\frac{1}{2}x]$

در ۲ ضرب می کنیم

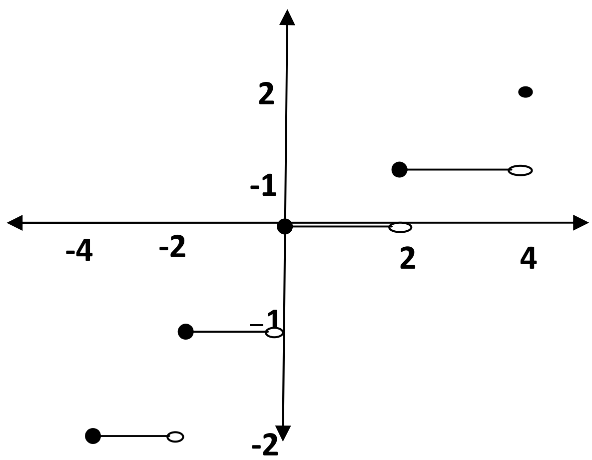
$-2 \leq \frac{1}{2}x < -1 \quad \rightarrow y = -2 \rightarrow x = -4 \leq x < -2$

$-1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \quad \rightarrow y = -1 \rightarrow x = -2 \leq x < 0$

$0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \quad \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0 \leq x < 2$

$1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \quad \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2 \leq x < 4$

$2 = \frac{1}{2}x \quad \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 4$



مثال: نمودار تابع $y = x - [x - 3]$ روی بازه $(-2 , 2)$ را رسم کنید.

$[-2,+2] \quad y = x - [x - 3]$

در ۳ جمع می کنیم

$-2 \leq x - 3 < -1 \rightarrow y' = -2 \rightarrow y = x + 2 \rightarrow 1 \leq x < 2$

x	1	2
y	3	4

$0 \leq x - 3 < 1 \rightarrow y' = 0 \rightarrow y = x + 0 \rightarrow 3 \leq x < 4$

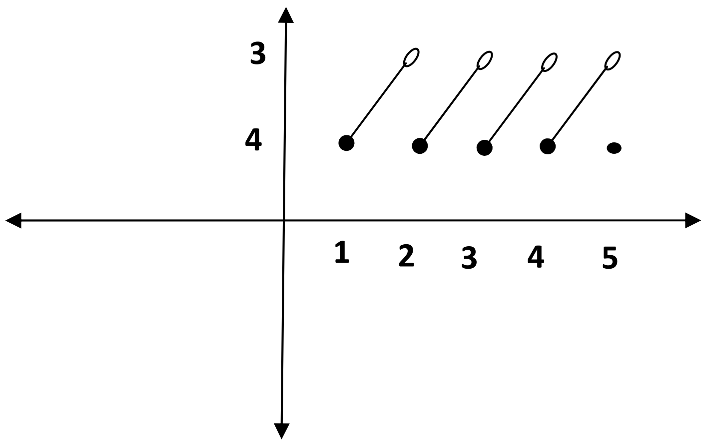
x	2	3
y	3	4

$1 \leq x - 3 < 2 \rightarrow y' = 1 \rightarrow y = x - 1 \rightarrow 4 \leq x < 5$

x	3	4
y	3	4

$2 = x - 3 \rightarrow y' = 2 \rightarrow y = x - 2 \rightarrow x = 5$

x	4	5
y	3	4



تمرین:

1) $y = 3$

2) $y = \frac{1}{2}$

3) $y = 2\frac{3}{5}$

4) $y = 3x - 1$

5) $y = -\frac{x}{2}$

6) $y = \frac{4x+5}{3}$

7) $y = 3 | x+2 |$

8) $y = x - | x - 3 |$

9) $y = | x + 1 | + | x + 1 |$

10) $y = 3 [x + 2]$

11) $y = x - [x - 3]$

12) $y = 3 [\frac{x}{4}] + [x-1]$

تابع نمایی

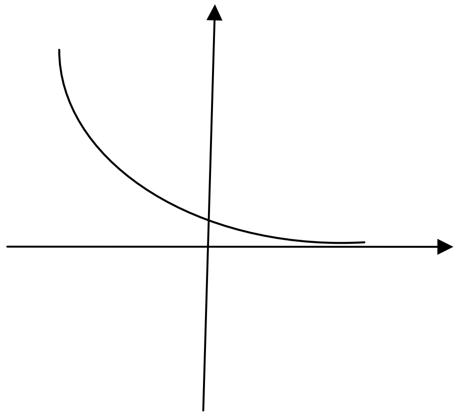
فرض کنید a عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ باشد تابع $y = an$ را با دامنه R و برد اعداد نا منفی $(0 , +\infty)$ تابع نمایی می گوییم. و نمودار آن را در دو حالت زیر رسم می کنیم.

۱. $0 < a < 1$
۲. $a > 1$

1. $0 < a < 1$

$y = (\frac{1}{2})^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



$(\frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{-3} = 2^3 = 8$

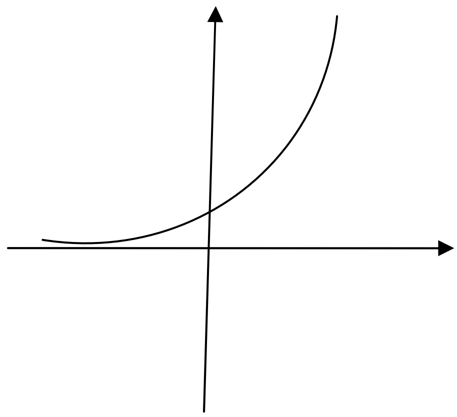
$(\frac{1}{2})^{-2} = \frac{1}{-2} = 2^2 = 4$

$(\frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{-1} = 2^1 = 2$

2. $a > 1$

$y = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4



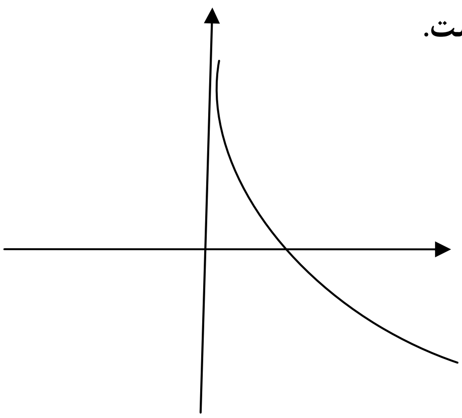
تابع لگاریتمی

تابع $y = \log_a x$ لگاریتم x در مبنای a را با شرط $0 < a < 1$ بزرگتر از صفر و مخالف ۱ با دامنه $(0 , +\infty)$ و برد اعداد حقیقی تابع لگاریتمی می گوییم و آن را در حالت $0 < a < 1$ و $a > 1$ بصورت زیر رسم می کنیم . این تابع معکوس تابع نمایی است.

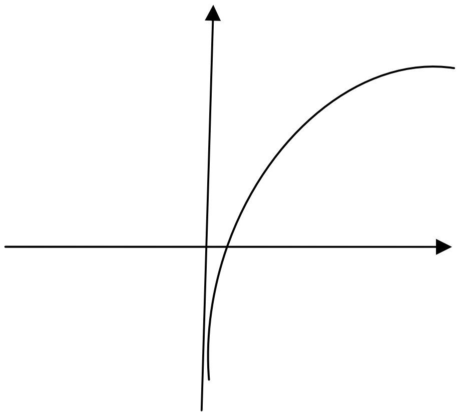
$D = (0 , +\infty)$

$R = IR$

1. $0 < a < 1$



2. a > 1



تذکر:

تابع لگاریتم و تابع نمایی بصورت زیر مرتبطند.

$\log_a b = C \Longrightarrow b^2 = a$

$2^3 = 8 \longrightarrow \log_2 8 = 2$

$10^2 = 100 \longrightarrow \log_{10} 100 = 2$ $\qquad$ $\log_e = \ln a$

ویژگی های لگاریتم

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_{b^n} a = \frac{1}{n}\log_b a$
3. $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$
4. $e^{\text{Lna}} = a$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_{b^m} a^n = \frac{m}{n}\log_b a$
7. $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$
8. $\text{Lne} = 1$
9. $\log_b a^n = n\log_a b$
10. $\log_b a^c = \log_b a + \log_b c$
11. $\log_a b \frac{\log_c a}{\log_c b}$
12. $\log\ a = \log\ a$

مثال:

$\log_7 49 = 2$ $\qquad$ $\log\ 10^{-4} = \frac{1}{\log\ 10} = -4$

$\log_8 8 = 1$ $\qquad$ $\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}$

$\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$ $\qquad$ $\log_{81} 9 = \log_{9^2} 9 = \frac{1}{2}\log_9 9 = \frac{1}{2}$

$\log\ 1000 = 3$ $\qquad$ $\text{Lne}^3 = 3\text{Lne} = 3 \times 1 = 3$

$\log\ 0.0001 = \log\ \frac{1}{10000}$ $\qquad$ $\text{Lne}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\log_{100} 1000 = \log_{10^2} 10^3 = \frac{3}{2}\log_{10} 10 = \frac{3}{2}$

$\log_2 3\sqrt{32} = \log_2 32\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\log_2 2^5 = \frac{5}{3}\log_2 2 = \frac{5}{3}$

$\log_3 7\sqrt{81} = \log_3 81\frac{1}{7} = \frac{1}{7}\log_3 3^4 = \frac{4}{7}\log_3 3 = \frac{4}{7}$

$\log_3 5\sqrt{(27)^2} = \log_3 27\frac{2}{5} = \frac{2}{5}\log_3 27 = \frac{2}{5}\log_3 3 = \frac{2}{5} \times \log_3 3 = \frac{2}{5} \times 3 \times 1 = \frac{6}{5}$

مثال: اگر لگاریتم ۲ برابر یا 0/3 باشد($\log\ 2 = 0/3$) لگاریتم ۵ و ۱۲۵ را تعیین کنید؟

اگر لگاریتم ۲ برابر یا 0/3 باشد($\log\ 2 = 0/3$) لگاریتم $\log\ 12$ را تعیین کنید؟

$\log\ 2 = 0/3$ $\qquad \log_{10} 5 = \log \frac{10}{2} = \log\ 10 - \log\ 2 = 1 - 0/3 = 0/7$

$\log\ 3 = 0/4$ $\qquad \log_{10} 12 = \log\ 3 \times 4 = \log\ 3 + \log_2 2 = 0/4 + 2 \log_{10} 2 = 0/4 + 2(0/3) = 1$

$\log\ 12 = ?$ $\qquad \log\ 125 = \log\ 5^3 = 3\ \log\ 5 = 3 \times 0/7 = 2/1$

$\log\ 125 = ?$

لگاریتم زیر را بدست آورید ؟

$$\log_8 \frac{\sqrt{2}}{4} = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}} 2^{-1} = \frac{1}{2} \times -2 \times \frac{1}{3} \log_2 2^2 = \frac{1}{2} \times -2 \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

تعیین دامنه توابع لگاریتمی

برای تعیین دامنه توابع کافی است عبارت تحت لگاریتم را بزرگتر از صفر قرار داده و آن را تعیین علامت می کنیم.

$y = \log_{a^x}$

$y = \log_{2^{2x-3}}$ $\qquad 2x - 3 > 0$

$x > \frac{3}{2} \longrightarrow D = (\frac{3}{2}, +\infty)$

$y = \log_{4^{\frac{1-x}{1+x}}}$ $\qquad (\frac{1-x}{1+x}) > 0$

$x = \pm 1 \quad D = (-1, +1)$

x	-∞	-1		1	+∞
P_1	++++++		++++++	‖ 0	--------
P_2	--------	‖ 0	++++++		++++++
p	--------	∦ 0	++++++ م.ج	‖ 0	--------

$y = \log_{\frac{1}{X-1}}$ $\qquad (\frac{1}{X-1}) > 0$

$X - 1 > 0 \qquad X > 0 \quad (+1, +\infty)$

$y = \log_{5^{(x^2-1)}}$ $\quad (x^2 - 1) > 0 \quad x = \pm$

$(-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$

x	-∞	-1		1	+∞
P	++++++ م.ج	‖ 0	--------	‖ 0	++++++ م.ج

$y = \log_{|x|}$ (x) > 0 (-∞,+∞) D = R- {0}

$y = \log_{(x^2+1)}$+ $y = \log_{(x+2)}$ - $y = \log_{(4-x)}$

D = R D=(-2,+∞) D = (-∞,4) D = (-2,4)

تعیین دامنه توابع لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی باید طرفین تساوی را تبدیل به یک لگاریتم هم مبنا با هم بکنیم بصورت

$\log_{a^P} = \log_{a^Q}$ به این ترتیب می توانیم با مساوی قرار دادن دو عبارت Q و P معادله را بصورت یک معادله درجه اول و دوم تبدیل کرده و سپس آن را حل کنیم.

$\log_{5^x} + \log_{(x+1)} = 1$

$\log_{5^{x(x+1)}} = \log_{5^5} \Rightarrow x^2 + x = 5 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0$

$\triangle = 1 - (1)(-5) = 21$

$X_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow$ (جواب مثبت) قابل قبول $X_1 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow$ (جواب منفی) غیر قابل قبول

مثال:

$\log_{(X+1)} + \log_{(X+1)} = 2$

$\log_{(X+1)(x+2)} = 2\log_{3^3} = \log_{3^{3^2}}$

$\log_{3^{(X+1)(x+2)}} = \log_{3^{3^2}}$ $(x+1)^2 = 3^2$

$X+1 = \pm 3$ x+1 = 3 x = 2 (جواب مثبت) قابل قبول x-1=3 x=-4 (جواب منفی) غیر قابل قبول

مثال:

$\log_{(0.5+x)} = \log_{(0.5)} - \log_{(x)}$

$\log_{(0.5+x)} = \log_{5^{(\frac{0.5}{x})}}$ $0.5x+x^2 = 0.5$

$X^2+0.5x - 0.5 = 0$

$(\times 2) \Rightarrow 2x^2+x-1=0$

$\triangle = 1-4(2)-(1)$ $x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ (جواب مثبت) قابل قبول

$\triangle = 9 = 3$ $x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$ (جواب منفی) غیر قابل قبول

مثال:

$$\log_{(x^2-11x+43)} = 2$$

$$\log_{(x^2-11x+43)} = \log_{5}5^2 \Rightarrow \log_{(x^2-11x+43)} = \log_{5}25$$

$$X^2-11x+43 = 25 \Rightarrow x^2-11x= (43 - 25) =0$$

$X^2 - 11x + 18 = 0 \quad (x-2)(x-9) = 0 \quad x = 2 , x = 9$ (هر دو قابل قبول(جواب مثبت)

مثال:

$$\log_{(4.5-X)} = \log_{(4.5)} - \log_{(X)}$$

$$\log_{(4.5-X)} = \log_{a}\left(\frac{4.5}{x}\right) \Rightarrow \frac{4.5-x}{1} = \frac{4.5}{x} \Rightarrow 4.5x - x^2 = 4.5$$

$$-x^2 + 4.5x - 4.5 = 0 \qquad (\times 2) \Rightarrow -2x + 9x - 9 = 0$$

$$\triangle = 81 - 4 (-2) (-9) \Rightarrow 81 - 72 = 9$$

$X_1 = \frac{-9+3}{-4} = \frac{3}{2} \quad x_2 = \frac{-9-3}{-4} = 3$ (هر دو قابل قبول(جواب مثبت)

معادلات نمایی

برای حل معادلات نمایی نیز باید طرفین مساوی را به فرم $ap = aQ$ تبدیل کنیم در این صورت می توانیم با مساوی قرار دادن توانها یعنی $P = Q$ معادله را تبدیل به یک معادله معمولی کرده و آن را حل کنیم.

$$\log_{4}x = \log_{4}3 \quad X = 3$$

$$2^x = 2^2 \quad x = 2 \qquad 5^x = 7 \Rightarrow x = \log_{5}7$$

$$3^x . 3^{x-1} = 9 \qquad 3^{2x+1} = 3^2 \Rightarrow 2x + 1 = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

مثال:

$$4^{x+1} + 4^x = 320 \Rightarrow 4^x(4^1 + 1) = 320 \Rightarrow 4^x . 5 = 320$$

$$4^x = \frac{320}{5} = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \quad x = 3$$

$$2 \times 3^{x+1} - 4 \times 3^{x-2} = 450 \Rightarrow 3^{x-2}(2 \times 3^3 - 4 \times 1) = 450 \Rightarrow 3^{x-2} (50) = 450$$

$$3^{x-2} = \frac{450}{50} = 9 \Rightarrow 3^{x-2} = 3^2 \Rightarrow x-2 = 2 \Rightarrow x = 4$$

مثال:

$49^x - 6 \times 7^x + 5 = 0$

$(7^x) - 6(7^x) + 5 = 0$

$7^x = y \qquad y^2 - 6y + 5 = 0$

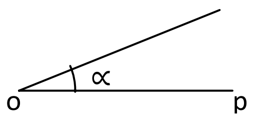
$(y-1)(y-5) = 0$

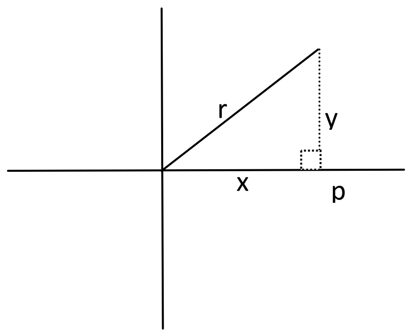
$7^x = 1 \qquad \Longrightarrow x = 0$

$7^x = 5 \qquad \Longrightarrow \log_{5}7$

مثلثات

نیم خط OP را در نظر بگیرید اگر نقطه P را در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران دهیم یک زاویه تولید می کند که برای این زاویه ۴ نسبت مثلثاتی sin و cos و tan و cot می توانیم تعریف کنیم.





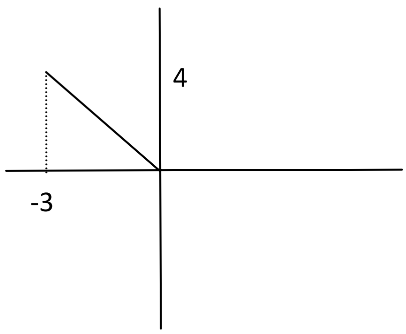
$\sin \propto = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{وتر}} = \dfrac{y}{r}$

$\tan \propto = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{y}{x}$

$\cos \propto = \dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{وتر}} = \dfrac{x}{r}$

$\cot \propto = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \dfrac{x}{y}$

مثال۱: نقطه p به مختصات (4,-3) زاویه θ را در صفحه مختصات ساخته است نسبتهای مثلثی این زاویه را بنویسید؟



P | - 3

4

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

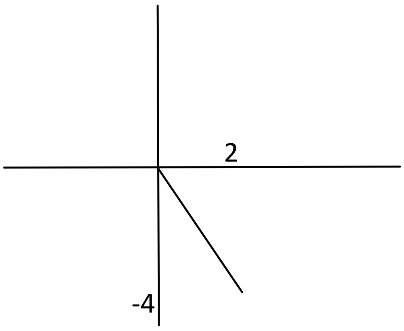
$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3}$

$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5}$

$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$

مثال۲: نقطه p به مختصات (2,-4) زاویه θ را در صفحه مختصات ساخته است نسبتهای مثلثی این زاویه را بنویسید؟

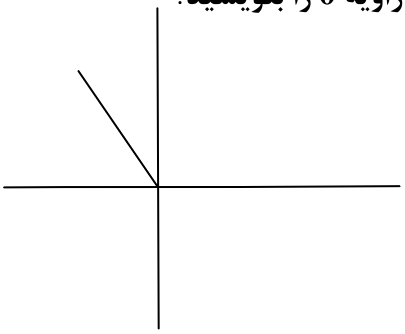


$$P \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -4 \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \end{array} \right.$$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\sqrt{20}}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{2} = -2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{\sqrt{20}}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-2}{4}$

مثال۳ : اگر بدانیم $\sin\frac{4}{5}$ و ضلع پایانی θ در ربع دوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه θ را بنویسید؟



$$P \left| \begin{array}{l} x = ? \\ y = 4 \\ r = 5 \end{array} \right.$$

$\sin = \frac{4}{5}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \Longrightarrow r^2 = x^2 + y^2$

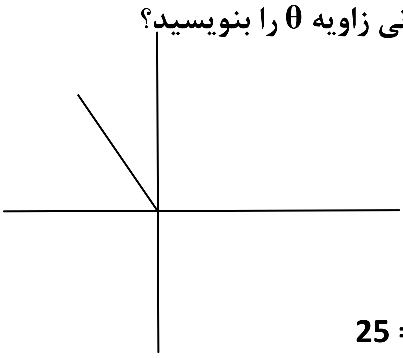
$25 = x^2 + 16 \Longrightarrow x^2 = 25 - 16 = 9$

$X = \sqrt{9} = \pm 3$ چون در ربع دوم خواستیم مقدار ۳- جواب خواهد بود

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$

مثال۴ : اگر بدانیم $\cos\frac{-2}{5}$ و ضلع پایانی θ در ربع دوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه θ را بنویسید؟



$$P \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = ? \\ r = 5 \end{array} \right.$$

$\cos = \frac{-2}{5}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \Longrightarrow r^2 = x^2 + y^2$

$25 = 4 + y^2 \Longrightarrow y^2 = 25 - 4 = 21 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{21}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{21}}{5}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{21}}{-2}$

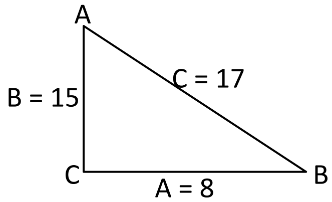
$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{5}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-2}{-\sqrt{21}}$

مثال۵: در مثلث ABC اگر A = 8 و B = 15 و C = 17 باشد نسبتهای مثلثی زاویه A را بدست آورید؟

a = 8

b = 15

c = 17



$$\sin A = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{8}{17} \qquad \tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{8}{15}$$

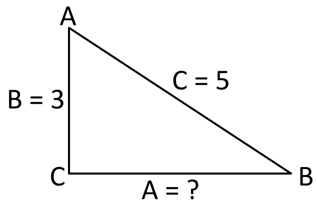
$$\cos A = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{15}{17} \qquad \cot A = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{15}{8}$$

مثال۶: در مثلث ABC اگر B = 3 و C = 5 باشد نسبتهای مثلثی زاویه A را بدست آورید؟

a = ?

b = 3

c = 5



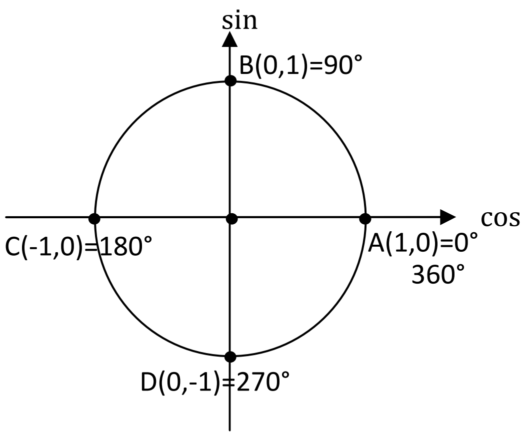
$$\sin A = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5} \qquad \tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{4}{3}$$

$$\cos A = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} \qquad \cot A = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{3}{4}$$

$$5^2 = 3^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \quad \Rightarrow a = 4$$

دایره مثلثاتی

دایره مثلثاتی دایره ای است به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک محل تقاطع این دایره با محورهای مختصات مطابق شکل زاویه های 0° و 90° و 180° و 270° و 360° را می سازد . با توجه به مختصات این نقاط و این مطلب که روی دایره مثلثاتی محور y ها همان sin و محور x ها همان cos ایست میتوانیم نسبتهای مربوط به این زوایا را بصورت زیر بنویسیم.

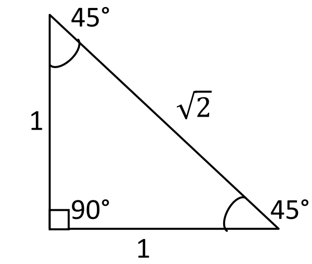


	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	ت ن	0	ت ن	0
cot	ت ن	0	ت ن	0	ت ن

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

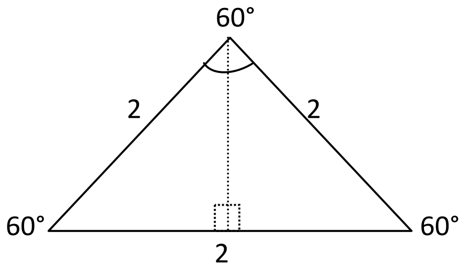
نسبت زاویه °45



$$\sin 45^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

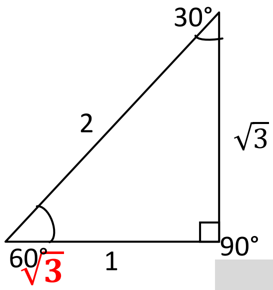
$$\cos 45^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

نسبت زاویه °60



$$\sin 60^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{1}{2} \qquad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1}{2} \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} =$$

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال: مقدار عددی عبارت زیر را محاسبه کنید؟

$$A = \frac{\sin 30^\circ \cos 45^\circ}{\cos 180^\circ} + \frac{\sin 60^\circ \cos 30^\circ}{\sin 270^\circ} - \frac{\tan 30^\circ}{\cot 45^\circ} + \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2})}{(-1)} + \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2})}{(-1)} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1} + 1 \quad \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \Rightarrow \frac{-3\sqrt{2}-9-4\sqrt{3}+12}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{3-3\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{12}$$

تذکر ۱:

برای محاسبه مقدار زاویه β بر حسب زوایای $180°$ و $360°$ مانند $\beta=180°\pm\propto$ یا $\beta=360°\pm\propto$ کافی است نسبت مثلثهای زاویه $\propto$ بجای زاویه β حساب کنیم. علامت این نسبت با توجه به مکان قرار گرفتن زاویه در صفحه مختصات مشخص می شود.

$\sin > 0 = +$ $\cos < 0 = -$ $\tan < 0 = -$ $\cot < 0 = -$	$\sin > 0 = +$ $\cos > 0 = +$ $\tan > 0 = +$ $\cot > 0 = +$
$\sin < 0 = +$ $\cos < 0 = +$ $\tan > 0 = -$ $\cot > 0 = -$	$\sin < 0 = -$ $\cos > 0 = +$ $\tan < 0 = -$ $\cot < 0 = -$

مثال : نسبتهای مثلثاتی زوایای خواسته شده را بنویسید؟

$225 = 180 + 45 \Downarrow$

$\sin 225 = \sin(180° + 45°) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\tan 225 = \tan(180° + 45°) = +1$

$\cos 225 = \cos(180° + 45°) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cot 225 = \cot(180° + 45°) = +1$

$330 = 360 - 30 \Downarrow$

$\sin 330 = \sin(360° - 30°) = \frac{-1}{2}$ $\quad$ $\tan 330 = \tan(360° - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos 330 = \cos(360° - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cot 330 = \cot(360° - 30°) = -\sqrt{3}$

$120 = 180 - 60 \Downarrow$

$\sin 120 = \sin(180° - 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\tan 120 = \tan(180° - 60°) = -\sqrt{3}$

$\cos 120 = \cos(180° - 60°) = \frac{-1}{2}$ $\quad$ $\cot 120 = \cot(180° - 60°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

تذکر ۲:

برای محاسبه نسبتهای مثلثاتی زوایایی که با °90 و °270 ساخته می شوند مانند $\beta=90°\pm\propto$ یا $\beta=270°\pm\propto$ هر نسبت مثلثاتی زاویه $\propto$ را معکوس می کنیم. یعنی sin را تبدیل به cos و برعکس tan را تبدیل به cot و علامت مربوط به نسبت مورد نظر را با توجه به مکان زاویه می نویسیم.

$120 = 90 + 30 \Downarrow$

$\sin 120 = \sin(90° + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\tan 120 = \tan(90° + 30°) = -\sqrt{3}$

$\cos 120 = \cos(90° + 30°) = \frac{-1}{2}$ $\qquad$ $\cot 120 = \cot(90° + 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$315 = 270 + 45 \Downarrow$

$\sin 315 = \sin(270° + 45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\tan 315 = \tan(270° + 45°) = -1$

$\cos 315 = \cos(270° + 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cot 315 = \cot(270° + 45°) = -1$

بسط سینوس

$\sin(\propto + \beta) = \sin\propto\cos\beta + \cos\propto\sin\beta$

$\sin(\propto - \beta) = \sin\propto\cos\beta - \cos\propto\sin\beta$

$\cos(\propto + \beta) = \cos\propto\cos\beta - \sin\propto\sin\beta$

$\cos(\propto - \beta) = \cos\propto\cos\beta + \sin\propto\sin\beta$

$\tan(\propto + \beta) = \frac{\tan\propto + \tan\beta}{1 + \tan\propto\tan\beta}$

$\tan(\propto - \beta) = \frac{\tan\propto - \tan\beta}{1 - \tan\propto\tan\beta}$

مثال:

$75° \Rightarrow \sin(45° + 30°) \Rightarrow \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

مثال ۲ : مقدار عددی عبارتهای زیر را حساب کنید؟

1. $\sin 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ \sin 40^\circ \Rightarrow \sin(\propto + \beta) = \sin(20 + 40) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 20^\circ \sin 10^\circ \Rightarrow \sin(\propto + \beta) = \sin(20 + 10) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
3. $\cos 22^\circ \cos 22^\circ - \sin 22^\circ \sin 22^\circ \Rightarrow \cos(22 + 23) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos 50^\circ \cos 40^\circ - \sin 50^\circ \sin 40^\circ \Rightarrow \cos(50 + 40) = \cos 90^\circ = 0$

اتحادهای مثلثاتی

1. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
2. $\sin^2 = 1 - \cos^2 \theta$
3. $\sin = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$
4. $\cos^2 = 1 - \sin^2 \theta$
5. $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$
6. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
7. $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$
8. $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
9. $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$
10. $\tan \theta \times \cot \theta = 1$
11. $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$
12. $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

مثال: درستی تساوی های زیر را بررسی کنید؟

1. $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta$

   $1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta$

2. $(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = 1$

   $\cos^2 \theta \times \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1$

3. $\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

   $\cot \theta + \tan \theta \Rightarrow \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

4. $(1 - \sin^2 \theta)(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}) = 1 + \cos^2 \theta$

   $\cos^2 \theta \, (1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}) = \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 \Rightarrow 1 + \cos^2 \theta$

5. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + 1 = 2$

6. $\frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} - 1} + \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} + 1} = 2\cot^2\theta$

$\frac{\cos\theta}{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}} + \frac{\cos\theta}{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{1-\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{1+\cos\theta} \Longrightarrow \frac{\cos^2\theta+\cos^3\theta+\cos^2\theta-\cos^3\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$\Longrightarrow \frac{2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 2\cos\theta$

پایان فصل

با آرزوی موفقیت شما دوستان

نوری