ریاضیات عمومی	استاد : شفیعی	دانشجو: منصور نوری

فهرست

بنام خدا

ویژگی های تابع

۱ – تابع زوج و فرد

تابع f با دامنه D_f را در نظر بگیرید و f را تابع زوج می گوییم هرگاه دامنه آن متقارن باشد و برای هر x از دامنه تابع داشته باشیم. $F(-x) = fx$ و تابع f را فرد می گوییم هرگاه دامنه آن متقارن باشد و برای هر x داشته باشیم . $f(-x) = -fx$

$D \ \forall X \in D \Rightarrow - X \in D$ ← دامنه متقارن

$\mathbb{R}$ دامنه متقارن

$\mathbb{Z}$ $(-a, +a)$

$\mathbb{Q}$ $[-2, 2]$

تذکر:

دامنه متقارن دامنه است که برای هر x از آن منفی x نیز جزء آن باشد.

مثال ۱ : در مورد زوج یا فرد بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید؟

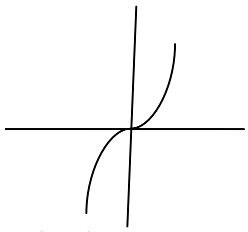
$f(x) = \sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{x^3} + x$

$f(x) = \sqrt[3]{(-x)^5} - \sqrt[3]{(-x)^3} + (-x)$

$-\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^3} - x \neq f(x)$ تابع زوج نیست

$-(\sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{x^3} + x) = -f(x)$ تابع فرد است

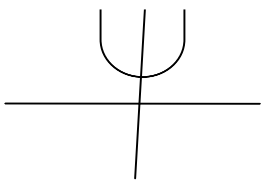
شکل عمومی تابع فرد



مثال ۲ : در مورد زوج یا فرد بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید؟

$g(x) = \frac{-4x^4 + 2x^2}{x^2 - 1}$ $\quad D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ متقارن

$g(-x) = \frac{-4(-x)^4 + 2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{-4x^4 + 2x^2}{x^2 - 1} = g(x)$ تابع زوج است



شکل عمومی تابع زوج (مرکز تقارن روی محور)

مثال ۳ : در مورد زوج یا فرد بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید؟

$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-x^2+1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ متقارن

$f(-x) = \frac{\sqrt[3]{(-x)}-(-x)^2+1}{(-x)} = \frac{-\sqrt[3]{x}-x^2+1}{-x} \neq f(x)$

$-(\frac{\sqrt[3]{x}-x^2+1}{-x}) \neq -f(x)$ تابع نه زوج است نه فرد

مثال ۳ : در مورد زوج یا فرد بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید؟

$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x} + 1 \Rightarrow D_g = X > 0 \longrightarrow (0, +\infty)$ نا متقارن

نمی تواند زوج یا فرد باشد چون نا متقارن است

ترکیب توابع

تابع $f(x)$ را با دامنه D_f و تابع $g(x)$ را با دامنه D_g در نظر بگیرید. ترکیب دو تابع f و g بصورت fog نشان می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم.

$Fog(x) = f(g(x)) \Longrightarrow D_{fog} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D \}$ تعریف رابطه

مثال: اگر $f(x) = 2x - 1$ و اگر $g(x) = x^2 + 3x$ باشد دامنه و ضابطه fog و gof را تعیین کنید؟

$D_{fog} = f(g(x)) = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$

$D_{gof} = g(f(x)) = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$

$f(g(x)) = 2g(x) - 1 \Longrightarrow 2(x^2 + 3x) - 1 \Longrightarrow 2x^2 + 6x - 1$

$g(f(x)) = f(x)^2 + 3(f(x)) \Longrightarrow (2x - 1)^2 + 3(2x - 1)$

ترکیب:

$$f(x)\begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 2x + 5 & 0 \le x \le 3 \\ 4 & x > 3 \end{cases} \qquad fog(x) = f(g(x))\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x < 0 \\ 2(3x - 5) + 5 & 0 \le x \le 3 \\ 4 & x > 3 \end{cases} = 6x - 5$$

$$g(x)\begin{cases} \sqrt{x} & x < 0 \\ 3x - 5 & 0 \le x \le 3 \\ x^2 & x > 3 \end{cases} \qquad gof(x) = g(f(x))\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x < 0 \\ 3(2x + 5) - 5 & 0 \le x \le 3 \\ 4^2 = 16 & x > 3 \end{cases} = 6x + 10$$

$$fof(x) = f(f(x)) \begin{cases} x & x < 0 \\ 2(2x+5)+5 & 0 \le x \le 3 \\ 4 & x > 3 \end{cases} = 4x + 15$$

$$gog(x) = f(g(x)) \begin{cases} \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x} & x < 0 \\ 3(3x-5)-5 & 0 \le x \le 3 \\ x^4 & x > 3 \end{cases} = 9x - 20$$

مثال: ضابطه و دامنه fog را تعیین کنید؟

$$\begin{cases} f(x) = 1 - \sqrt{x} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \qquad D_F = X \geq 0 \Rightarrow [\,0\,, +\infty\,)$$

$$D_g = 0 \quad \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{Fog} = f(g(x)) = \{\, x \in D_g \mid g(x) \in D_g \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \tfrac{1}{x} \in [0\,, +\infty) \,\} = (0\,, +\infty)$$

$$f(g(x)) = 1 - \sqrt{\frac{1}{x}} \qquad D_{Fog} = (0\,, +\infty)$$

توابع یک به یک

تابع f را یک به یک می گوییم هرگاه هر ورودی را فقط و فقط به یک خروجی نسبت دهد . به عبارت دیگر دو زوج مرتب با مولفه های دوم برابر داشته باشد. مولفه های اول آن نیز با هم برابر باشند . در واقع اگر X_1 , X_2 دو عضو از دامنه f باشند داشته باشیم:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f = \{ (1,1)(4,5)(6,7) \}$ رابطه ۱ – ۱ برقرار است

$g = \{ (2,5)(7,5)(6,1)(6,3) \}$ رابطه ۱ – ۱ نیست

$k = \{ (1,0)(1,2)(3,5) \}$ رابطه نیست

مثال ۱:

$f(x) = 2x - 5$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ فرمول

$2x_1 - 5 = 2x_2 - 5$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$ رابطه ۱ – ۱ است

$g(x) = 3x^2 - 2$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ فرمول

$3x_1^2 - 2 = 3x_2^2 - 2$

$3x_1^2 = 3x_2^2$

$x_1 = x_2^2$ رابطه ۱ – ۱ نیست

مثال ۲:

$f(x) = \frac{x-1}{1+x}$ $\quad f(x_1) = f(x_2)$

$\frac{x_1-1}{1+x_1} = \frac{x_2-1}{1+x_2} \Rightarrow \quad x_2 - 1 + x_1x_2 - x_1 = x_1 - 1 + x_1x_2 - x_2$

$x_2 - x_1 = x_2 - x_1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$ رابطه ۱ – ۱ است

مثال ۳:

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-5}{3+\sqrt{3x}}$ $\quad f(x_1) = f(x_2)$

$\frac{\sqrt{x_1}-5}{3+\sqrt{3x_1}} = \frac{\sqrt{x_2}-5}{3+\sqrt{3x_2}} \Rightarrow \quad 3\sqrt{x_1} + \sqrt{3x_1x_2} - 15 - 5\sqrt{3x_2} = 3\sqrt{x_2} + \sqrt{3x_2x_1} - 15 - 5\sqrt{3x_1}$

$3\sqrt{x_1} - 5\sqrt{3x_2} = 3\sqrt{x_2} - 5\sqrt{3x_1}$

$\sqrt{x_1}\,(3 + 5\sqrt{3}) = \sqrt{x_2}\,(3 + 5\sqrt{3})$

$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ رابطه ۱ – ۱ است

توابع معکوس پذیر

تابع f معکوس پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد . معکوس تابع f با ضابطه $f^{-1}(x)$ نشان می دهیم و برای بدست آوردن ضابطه آن بصورت زیر عمل می کنیم.

ضابطه تابع f را برابر با y قرار می دهیم و معادله را بر حسب x حل می کنیم تا به تساوی $x = g(x)$ برسیم در این مرحله کافی است بجای x عبارت $f^{-1}(x)$ قرار دهیم و به جای x مقدار y قرار می دهیم تا ضابطه تابع معکوس زیر بدست آید.

مثال ۱ در صورت وجود معکوس تابع را تعیین کنید؟

$f(x) = 2x + 1$ $\qquad 2x + 1 = y$

$f(x_1) = f(x_2)$ $\qquad 2x = y - 1$

$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ $\qquad x = \frac{y-1}{2}$

$x_1 = x_2$ رابطه ۱ – ۱ است $\qquad f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

مثال ۲ در صورت وجود معکوس تابع را تعیین کنید؟

$f(x) = x^3 + 2$ $\qquad x^3 + 2 = y$

$f(x_1) = f(x_2)$ $\qquad x^3 = y - 2$

$x^3_1 + 2 = x^3_2 + 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1{}^3} = \sqrt[3]{x_2{}^3}$ $\qquad x = \sqrt[3]{y-2}$

$x_1 = x_2$ رابطه ۱ – ۱ است $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{y-2}$

مثال ۳ در صورت وجود معکوس تابع را تعیین کنید؟

$f(x) = \sqrt[3]{x} + 5$

$f(x_1) = f(x_2)$

$\sqrt[3]{x_1} + 5 = \sqrt[3]{x_2} + 5 \implies \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}$

$x_1 = x_2$ رابطه ۱ – ۱ است

$\sqrt[3]{x} + 5 = y$

$(\sqrt[3]{x})^3 = (y - 5)^3$

$x = (y - 5)^3$

$f^{-1}(x) = (x - 5)^3$

مثال ۴ در صورت وجود معکوس تابع را تعیین کنید؟

$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

$f(x_1) = f(x_2)$

$\frac{x_1+2}{x_1-1} = \frac{x_2+2}{x_2-1}$

$x_1x_2 - x_1 + 2x_2 - 2 = x_1x_2 - x_2 + 2x_1 + 2$

$-x_1 - 2x_1 = -x_2 - 2x_2$

$-3x_1 = -3x_2$

$x_1 = x_2$ رابطه ۱ – ۱ است

$\frac{x+2}{x-1} = y$

$x = 2 = xy - y$

$x - xy = y + 2$

$x(y - 1) = y + 2$

$x = \frac{y+2}{y-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$

توابع پوشا

تابع f را پوشا می گوییم (F: A ⟶ B) هرگاه برد f کل مجموعه B را بپوشاند به عبارت دیگر F پوشا است. هرگاه به ازاء هر عضو $b \in B$ عضوی مانند a از مجموعه اول (A) وجود داشته باشد بطوری که داشته باشیم $f(a) = b$

مثال ۱ : کدام یک از توابع زیر پوشا است؟

$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 3x + 5$

$f(a) = b$

$3a + 5 = b$

$3a = b - 5$

$a = \frac{b-5}{3} \in \mathbb{R}$ پوشا است

$F: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 3x + 5$

$f(a) = b$

$3a + 5 = b$

$3a = b - 5$

$a = \frac{b-5}{3} \in \mathbb{Z}$ پوشا نیست

مثال ۲ : کدام یک از توابع زیر پوشا است؟

$F: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 1$

$f(a) = a^2 - 1$

$a^2 - 1 = b$

$a^2 = b + 1$

$a = \pm\sqrt{b+1} \in \mathbb{R}$ پوشا نیست

$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$f(x) = \sqrt{x^2} + 1$

$f(a) = b$

$\sqrt{x^2} + 1 = b$

$a^2 + 1 = b^2$

$a = \pm\sqrt{b^2 - 1} \in \mathbb{R}^+$ پوشا نیست

$F: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f(x) = 2x - 1$

$f(a) = 2a = b + 1$

$2a = b + 1$

$a = \frac{b+1}{2} \in \mathbb{Z}$ پوشا نیست

$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = \sqrt{a}$

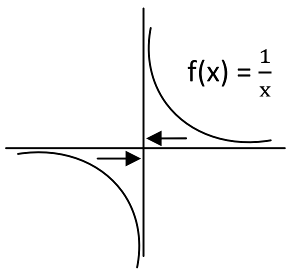
$\sqrt{a} = b$

$a = b^2 \in \mathbb{R}^+$ پوشا است

حد

$f(x) = \frac{1}{x}$ $x = 0$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	0	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{x}$	-1	-2	-10	-100		100	10	2	1



$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

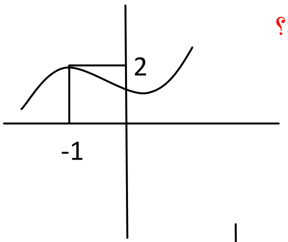
تعریف حد

$\lim f(x)$ وقتی $x \to a$ میل می کند برابر است با L اگر و فقط اگر برای هر عدد حقیقی مثبت اپسیلون (ε) وجود داشته باشد یک عدد حقیقی مانند δ بطوری که اگر قدر مطلق $x - a$ بین صفر و δ باشد آن گاه قدر مطلق $\lim f(x)$ کمتر از اپسیلون (ε) می باشد.

$0 < |x - a| < \delta$ آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$

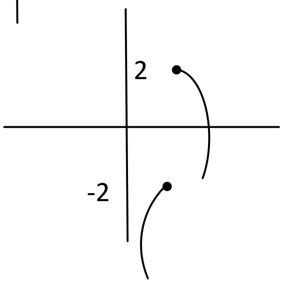
مثال : با استفاده از نمودار حد هر یک از توابع زیر را حساب کنید؟

$\lim_{x\to -1} f(x) = 2$



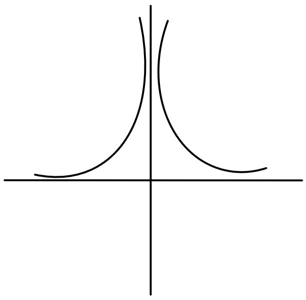
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$



$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$



قضیه حد

1. $\lim_{x\to a} c = c$ $\quad \lim_{x\to 4} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to \sqrt{2}} 0 = 0$
2. $\lim_{x\to a} cx = ca$ $\quad \lim_{x\to 2} 4x = 4(2) = 8$, $\lim_{x\to -2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-2) = -1$
3. $\lim_{x\to a} cx + b = ca+b$ $\quad \lim_{x\to 0} 2x - 5 = 2(0)-5 = -5$, $\lim_{x\to 1} 3x + 4 = 3(1)+4 = 7$

نکته:

در حالت کلی $\lim f(x)$ وقتی $x \to a$ برابر است با f(x) یعنی ($\lim f(x) = f(x)$) به شرطی که f(a) یکی از صورتهای $\frac{0}{0}$ یا 0^0 یا ∞^∞ یا $\infty - \infty$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشد مقدار حد مبهم است و باید به روشهایی که ذکر خواهد شد ابتدا از تابع رفع ابهام شود.

مثال: عدد هر یک از توابع زیر را حساب کنید؟

1. $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+1} = 1$
2. $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2-1} = \sqrt{8}$
3. $\lim_{x\to 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$
4. $\lim_{x\to 6} 4x-5 = 19$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{3x-1}{2x+1} = -1$
6. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \frac{0}{0}$ مبهم
7. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$ مبهم

برای رفع ابهام از حدود مبهم $\frac{0}{0}$ در صورت امکان صورت یا مخرج کسر را تجزیه می کنیم تا عوامل مبهم کننده از صورت و مخرج کسر ساده شود. روش دیگر رفع ابهام از این مبهم این است که صورت یا مخرج کسر را تبدل به اتحاد کنیم (اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر)

چاق و لاغر $= (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

چاق و لاغر $= (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$
2. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3} x-3 = -6$
3. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x^2-2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to -2} (x^2-2x+4) = 12$
4. $\lim_{x\to -3} \frac{x^4-81}{x^2-9} = \lim_{x\to -3} \frac{(x^2-9)(x^2+9)}{x^2-9} = \lim_{x\to -3} (x^2-9) = 18$
5. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x^2-3x+9) = 27$
6. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} x = -1$
7. $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-16x}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4} \frac{x(x^2-16)}{x(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} x+4 = 8$
8. $\lim_{x\to 0} x^2+2x = 0$
9. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$
10. $\lim_{x\to -7} \frac{-x^2+49}{x+7} = \lim_{x\to -7} \frac{-(x+7)(x-7)}{x+7} = \lim_{x\to -7} -(x+7) = 14$

11. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x-10}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to2}x+5=7$

12. $\lim_{x\to-8}\frac{x^2-9x+8}{x+8}=\lim_{x\to-8}\frac{(x+8)(x+1)}{(x+8)}=\lim_{x\to-8}x+1=-7$

13. $\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x^2+7x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+3x+7)}{x}=\lim_{x\to0}x^2+3x+7=7$

14. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}(4x^2+2x+1)=3$

15. $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+3)}{(x+1)}=\frac{-1}{1}=-1$

16. $\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to3}\frac{x+3-6}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{6}$

17. $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{4}$

18. $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=4$

19. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\times\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)}{(x-4)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to3}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

20. $\lim_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\times\frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)}=\lim_{x\to9}(\sqrt{x}+3)=6$

21. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{3}$

22. $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to8}\frac{(x-8)}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to8}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{1}{12}$

23. $\lim_{x\to27}\frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9)}{(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9)}=\lim_{x\to27}\frac{(x-27)}{(x-27)(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9)}=\lim_{x\to27}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9)}=\frac{1}{27}$

حد در بینهایت و حد بینهایت

حد توابع کسری بصورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ زمانی که $x\to a$ اگر به این ترتیب باشد که $f(a)$ به یک عدد و $g(a)$ به صفر میل کند آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ خواهد بود که علامت این ∞ با توجه به علامت صورت و مخرج کسر تعیین می شود.

حد راست : اگر در محاسبه $\lim f(x)$ که x را از سمت راست a یا مقادیر بیشتر از a به آن نزدیک کنیم می گوییم حد راست تابع را حساب کرده ایم و می نویسیم $\lim_{x\to a^+}f(x)$ که x از سمت راست به a نزدیک می شود.

حد چپ : در صورتی که x از سمت چپ a یا از سمت مقادیر کمتر از a به آن نزدیک شود می گوییم حد چپ a را حساب کرده ایم و می نویسیم $\lim_{x\to a^-}f(x)$ که x از سمت چپ به a نزدیک می شود.

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|1|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|1|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x+1}{x^2} = \frac{+1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{4}{x+1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

حد توابع کسری

حد توابع کسری بصورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ زمانی که $f(x)$ به یک عدد و $g(x)$ به ∞ برابر با صفر است. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

مثال:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\lim_{x} \frac{-2x}{x^2} = \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3}{x} = -\infty$$

در محاسبه حد توابع کسری بصورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ کافی است فقط از جملاتی در صورت و مخرج کسر حد بگیریم که بیشترین درجه را داشته باشد که در این صورت ۳ حالت اتفاق می افتد.

الف : اگر درجه صورت با درجه مخرج مساوی باشد جواب حد عدد یک است.

ب : اگر درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد در این صورت جواب حد صفر است.

ج : اگر درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد در این صورت جواب حد ∞ است.

* تذکر مهم :

روش فوق فقط زمانی قابل اجراست که $x \to \infty$ باشد .

مثال:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^5+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^5}{x^5} = -3$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x^2-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x} = 0$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5+2x-1}{-x^3+4x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^5}{-x^3} = \frac{4x^2}{-1} = -\infty$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\infty} = 0$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x+7}{8x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{8x} = \frac{1}{2}$
6. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x+2}{5x^2+2x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{5x^2} = \frac{3}{5}$
7. $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+2x-1}{x^2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$
8. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-100}{4x+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{4x} = \frac{2x}{4} = +\infty$
9. $\lim_{x\to\infty} \frac{13-4x^2}{5x^2-8x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^2}{5x^2-8x^2} = \frac{-4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$
10. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\infty} = 0$
11. $\lim_{x\to\infty} \frac{-7x^4+5x^3}{3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x}{3} = -\infty$
12. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{x-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3}\,x}{x} = \sqrt{3}$
13. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^3+5x^2}{\sqrt{x^6-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^3} = x\to\infty = \infty$
14. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{x^2}{x} = 2$
15. $\lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2+x}{\sqrt{16x^4-8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2}{\sqrt{16x^2}} = \frac{-5x^2}{4x^2} = \frac{-5}{4}$
16. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3+80}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{x^2} = 0$

حد توابع مثلثاتی

برای حد گیری از توابع مثلثاتی مانند توابع معمولی ابتدا مقدار a را جایگزین x می کنیم اگر جواب مبهم باشد با استفاده از قضایای زیر آنها را رفع ابهام می کنیم.

نکته $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $2\pi = 360°$

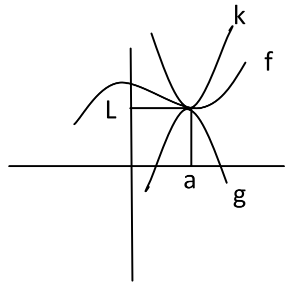
1. $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$
2. $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$
3. $\lim_{x\to a} \tan x = \tan a$
4. $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
7. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
8. $\lim_{x\to 0} \tan x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

مثال:

1. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
2. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \cos x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin -3x}{2x} = \frac{-3}{2}$
5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$
6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan x.\cot x = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan\frac{\pi}{4}.\cot\frac{\pi}{4} = -1 \times -1 = 1$
7. $\lim_{x\to \pi} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to \pi} \frac{1-\cos\pi}{\pi} = \frac{2}{\pi}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^3}{x^2} = \frac{\sin x \times \sin x \times \sin x}{x \times x \times x} = \frac{1\times 1\times 1}{1} = 1$
10. $\lim_{x\to \infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} \times \sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin y}{y} = 1$ $\quad (\frac{1}{x} = y)$
11. $\lim_{x\to \infty} x\,(1-\cos\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \to 0 = \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$

قضیه فشار

فرض کنید تابع $f(x)$ و $g(x)$ و $k(x)$ بصورت زیر در ارتباط باشد $g(x) \le f(x) \le k(x)$ بطوری که داشته باشیم $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} k(x) = L$ در این صورت خواهیم داشت $\lim_{x \to a} f(x) = L$



$$f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = ?$$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le -1$$

$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \le \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} \le \lim_{x \to 0} x^2$$

$$0 \le \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} \le 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

مثال۱: اگر تابع $|f(x)-5| \le (x+2)5$ داشته باشیم مقدار $\lim_{x \to -2} f(x)$ را بدست آورید؟

$$\lim_{x \to -2} -(x+2)^5 \le \lim_{x \to -2} f(x) - 5 \le \lim_{x \to -2} (x+2)^5$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) - 5 = 0 \implies \lim_{x \to -2} f(x) = 5$$

مثال۲: اگر تابع $x3-8x+7 < f(x)-2 < x2 + 4x-5$ داشته باشیم مقدار $\lim_{x \to 1} f(x)$ را بدست آورید؟

$$\lim_{x \to 1} x^3 - 8x + 7 < \lim_{x \to 1} f(x) - 2 < \lim_{x \to 1} x^2 + 4x - 5$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) - 2 = 0 \implies \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

مثال از حد توابع مثلثاتی:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,\sin 2x\,\sin 3x\,\sin 4x}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin 2x}{2x}\,\frac{\sin 3x}{x}\,\frac{\sin 4x}{x}=\frac{24}{2}=12$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2}=0$ بر اساس قضیه

3. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\lim(2x-1)}{2x-1}=1$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{(\cos x)(1+\sin x)}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{(\cos x)(1+\sin x)}=$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin(x)}=\frac{0}{2}=0$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}=\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x}}=\frac{1}{0}=\infty$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{x}{1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos 2x}=\frac{2}{\cos 2x}=\frac{2}{1}=2$

پیوستگی

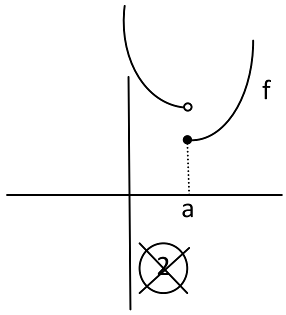
تابع f را در نقطه a از دامنه آن پیوسته می گوییم هرگاه سه شرط زیر را همزمان داشته باشد:

۱. مقدار f در نقطه a موجود باشد. $f(x)\in R$

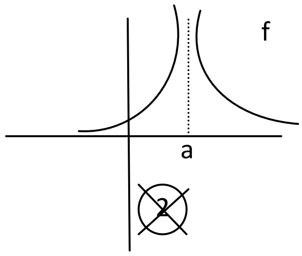
۲. حد چپ و راست تابع در نقطه A موجود و با هم برابر باشد. $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$

۳. حد تابع با مقدار تابع برابر باشد. $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

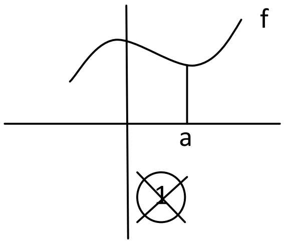
توضیح پیوستگی در شکل های زیر:



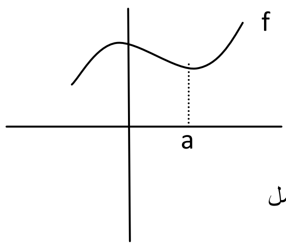
ناپیوستگی رفع نشدنی



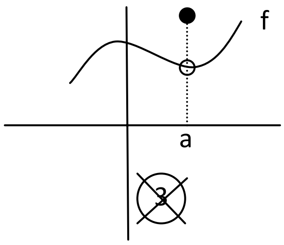
ناپیوستگی رفع نشدنی



ناپیوستگی رفع شدنی



پیوستگی کامل



ناپیوستگی رفع شدنی

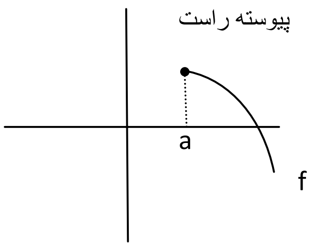
$$\underbrace{\lim_{x\to a^-} f(x) = \overbrace{f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)}^{\text{پیوستگی راست}}}_{\text{پیوستگی کامل}}$$

پیوستگی چپ

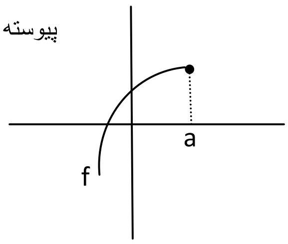
پیوستگی چپ و راست

تابع f(x) را در نقطه a از راست پیوسته می گوییم اگر مقدار تابع و حد راست تابع هر دوموجود و با هم برابر باشد به همین ترتیب تابع f(x) در نقطه a پیوستگی چپ دارد اگر مقدار تابع و حد چپ تابع هر دو موجود و با هم برابر باشد.

پیوسته راست



پیوسته چپ



مثال۱ : پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه a بررسی کنید؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ -1 & \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ -1   -1   1   پیوستگی چپ

$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

مثال۲ : پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه a بررسی کنید؟

$$g(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ 1-x & 0<x<1\\ x^2 & 1\le x\le 2\\ 3x-2 & x\ge 2\end{cases}$$

$g(0)=1$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1-x = 1$ پیوستگی کامل

$g(1)=x^2=1$ $g(2)=3x-2=4$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 1-x = 0$ $\lim_{x\to 2^-} g(x) = x^2 = 4$

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = x^2 = 1$ پیوستگی راست $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 3x-2 = 4$ پیوستگی کامل

مثال۳ : نقاط پیوستگی توابع زیر را حساب کنید؟

$$g(x)=\begin{cases}2x+1 & x<-1\\ x^2-2 & -1\le x<0\\ \sqrt{x+4} & 0\le x<1\\ \sqrt{x-1} & x\ge 1\end{cases}$$

$g(-1)=x^2-2=-1$

$\lim_{x\to -1^-} g(x) = 2x+1 = -1$

$\lim_{x\to -1^+} g(x) = x^2-2 = -1$ پیوستگی کامل

$g(0)=\sqrt{x+4}=2$ $g(1)=\sqrt{x-1}=0$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = x-2 = -2$ $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \sqrt{x+4} = 2$ پیوستگی راست $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \sqrt{x-1} = 0$ پیوستگی راست

مثال۴ : به ازاء چه مقدار از x تابع f پیوستگی دارد؟

$$f(x)=\begin{cases} x^3-4 & x<2 \\ 3ax+4 & x\geq 2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3-4 = 4$

$3ax+4 = 6a+4$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3ax + 4 = 6a+4$

$6a+4=4$

$6a = 0 \qquad a=0$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x^3+1} & x\neq -1 \\ \frac{3b+1}{3} & x=-1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{3b+1}{3} = \frac{3b+1}{3}$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{x^3+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+b^2)} = \frac{1}{x^2-x+b^2} = \frac{1}{3}$

$\frac{3b+1}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow 3b+1=1$

$3b = 0 \qquad b=0$

مثال۵ : مقدار $f(3)$ را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ با ضابطه زیر در نقطه ۳ پیوسته باشد؟

$f(x) = \frac{x^3-27}{x-3} \qquad f(3)$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{x-3}} = 27$

$\lim_{x\to 3} (x^2+3x+9) = 27 \rightarrow f(3)=27$

مثال۶ : مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع روی R پیوسته باشد؟

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} x+1 = \frac{-\pi}{2}+1$ حد چپ

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} a\sin x + b = -a+b$ حد راست

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} a\sin x + b = a+b$ حد چپ

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}+1 = -a+b \\ a+b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{-a}+b = -\frac{\pi}{2}+1 \\ \cancel{a}+b=0 \end{cases}$$

$$2b = -\frac{\pi}{2}+1 \to b = -\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \to a = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

مشتق

معادله خط راست

برای نوشتن معادله خط راستی که از دو نقطه A به مختصات y0 و x0 و B به مختصات y1 و x1 می گذرد . ابتدا شیب این خط را پیدا می کنیم و سپس با استفاده از شیب و یک نقطه از خط با جایگزین در فرمول زیر می توانیم معادله خط مورد نظر را بنویسیم.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\tan\alpha = m = \frac{\text{زاویه مقابل}}{\text{زاویه مجاور}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad y = mx + b$$

مثال: معادله خط راستی را بنویسید که از دو نقطه $A\left|\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right.$ و $B\left|\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right.$ بگذرد؟

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-(-2)}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$ شیب

$y + 2 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x$

$y - 4 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 4 \Rightarrow y = 2x$

❖ تذکر ۱

دو خط L' و L با هم موازی اند اگر شیبهای آنها با هم برابر باشند و بر هم عمودند اگر شیبهای آنها عکس و قرینه هم باشند.

❖ تذکر ۲

در معادله استاندارد شده خط راست به فرم $y = mx + b$ مقدار m شیب خط و مقدار b عرض از مبداء می باشد .

❖ تذکر ۲

معادله خطوطی که با محور xها موازی هستند به فرم کلی $y = b$ و معادله خطوطی که با محور yها موازی هستند به فرم کلی $x = a$ نوشته می شود.

مثال ۱ : معادله خطی را بنویسید که الف) با خط $4x - 2y = 1$ موازی باشد و از مبداء مختصات بگذرد و ب) و معادله خطی را بنویسید که بر خط فوق عمود باشد و از نقطه $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ بگذرد ؟

$4x - 2y = 1 \qquad A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$

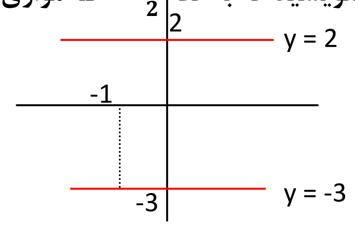
$y = \frac{4x-1}{2} \Rightarrow y = 2x - \frac{1}{2}$ معادله خط $m = 2$ شیب خط

مبداء مختصات $\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \qquad y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$

عرض از مبداء $m' = -\frac{1}{2} \qquad A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. \to y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

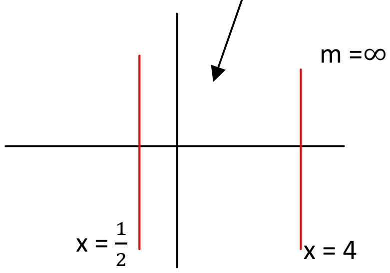
مثال ۱ : معادله خطی را بنویسید که الف) با خط $y = 2$ موازی باشد و از نقطه $A\left|\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}\right.$ بگذرد

ب) و معادله خطی را بنویسید که با خط $x = -\frac{1}{2}$ موازی باشد و از نقطه $B\left|\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\right.$ بگذرد ؟



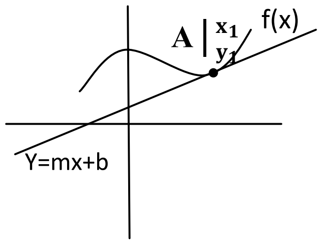
$A\left|\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}\right. \Rightarrow y = -3 \Rightarrow y = b$

$B\left|\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\right. \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x = a$



مثال : تابع f(x) و نقطه A به مختصات $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ از آن را در نظر بگیرید. برای نوشتن معادله خط مماس بر این منحنی به شیب خط نیاز داریم . برای پیدا کردن شیب خط کافی است از تابع f از نقطه A مطابق فرمول زیر مشتق بگیریم.

$$f'(x) = \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x)}{x-x_1}$$



مثال۱: معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=x^2$ در نقطه $A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ از این منحنی را بنویسید؟

$$m = f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-(2)^2}{x-2} = \frac{0}{0} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$

$$y-4 = 4(x-2) \rightarrow y-4 = 4x-8 \rightarrow y = 4x-8+4$$

$$\boxed{y = 4x - 4}$$

مثال۲: معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=x^2$ در نقطه $A\left|\begin{matrix}-3\\9\end{matrix}\right.$ از این منحنی را بنویسید؟

$$m = f'(-3) = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-(-3)^2}{x-(-3)} = \frac{0}{0} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3} x-3 = -6$$

$$m = f'(-4) = \lim_{x\to -4} \frac{x^2-(-4)^2}{x-(-4)} = \frac{0}{0} = \frac{(x-4)(x+4)}{x+4} = \lim_{x\to -3} x-4 = -8$$

تعریف مشتق

در حالت کلی مشتق تابع f(x) که بصورت $f'(x)$ نشان می دهیم برابر است با:

$$F'(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

مثال۱: مشتق تابع $f(x)= x^2$ را حساب کنید؟

$$F'(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{x^2+2x\Delta+\Delta x^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta\to 0} 2x+\Delta x = 2x$$

مثال۲: مشتق تابع $f(x)=-3x+\frac{1}{2}$ را حساب کنید؟

$F'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$F'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{-3(x+\Delta x)-(-3+\frac{1}{2})}{\Delta x}=f'(x)=\frac{-3x-3\Delta x+\frac{1}{2}+3x-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{-3\Delta x}{\Delta x}=-3$

مثال۳: مشتق تابع $f(x)=2x^2+3x+1$ را حساب کنید؟

$F'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$F'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+1-(2x^2+3x+1)}{\Delta x}=f'(x)=\frac{\cancel{2x^2}+4x\Delta x+2\Delta x^2+\cancel{3x}+3\Delta+\cancel{1}-\cancel{2x^2}-\cancel{3x}-1}{\Delta x}=$

$\lim_{\Delta\to 0}\frac{4x\Delta x+2\Delta x^2+3\Delta}{\Delta x}=\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}4x+2\Delta+3=4x+3$

مثال۳: مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را حساب کنید؟

$F'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$F'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=f'(x)=\frac{\frac{x-x-\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)x\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=\frac{-1}{x^2}$

مثال۴: مشتق تابع $f(x)=x^3$ را حساب کنید؟ (درجه سوم = (a+b)3=a3+3a2b+3ab2+b3)

$F'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-(x^3)}{\Delta x}=f'(x)=\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x}=3x^2$

مثال۵: مشتق تابع $f(x)=-2x^3+2x^2-x+1$ را حساب کنید؟

$F'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{-2(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2+1(-2x^3+2x^2-x+1)}{\Delta x}=$

$f'(x)=\frac{-2x^3-6x^2\Delta x-6x\Delta x^2-2\Delta x^2+2x^2+4x\Delta x+2\Delta x^2-x-\Delta x+1+2x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x(-6x^2-6x\Delta x-2\Delta x+4x+2\Delta x-1)}{\Delta x}=-6x^2+4x-1$

فرمول های مشتق

1. $f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = kx \rightarrow f'(x) = k$
3. $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
4. $f(x) = kx^n \rightarrow f'(x) = knx^{n-1}$

مثال:

$$f(x) = \frac{2}{5} \rightarrow f'(x) = 0$$
$$f(x) = -x \rightarrow f'(x) = -1$$
$$f(x) = \frac{-2}{3}x \rightarrow f'(x) = \frac{-2}{3}$$
$$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightarrow f'(x) = -2x^{-3}$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^1}} = x^{\frac{-1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$$

تذکر:

$$f(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots.$$
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots.$$
$$f(x) = -2x^3+2x^2-x+1$$
$$f'(x) = -6x^2+4x-1+0$$

مثال:

$$f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^3} = \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} = 2x^{-1}+x^{-2}-x^{-3}$$
$$f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} \rightarrow f'(x) = x^{\frac{-1}{2}} - \frac{9}{4}x^{\frac{-1}{4}} - \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{2}}$$
$$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{5x^2+x^3}{x} = 4x^{-1} + \frac{5x^2}{x} + \frac{x^3}{x} = 4x^{-1} + 5x + x^2 \rightarrow f'(x) = -4x^{-2} + 5 + 2x$$

فرمول های مشتق حاصل ضرب و تقسیم

1. $h(x) = f(x).g(x)$
   $h'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$
2. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ توی مخرج کسر به هیچ عنوان مشتق نمی گیریم
   $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ مشتق صورت در مخرج – مشتق مخرج در صورت
3. $h(x) = \frac{k}{f(x)} \rightarrow h'(x) = -\frac{kf'(x)}{f^2(x)}$

مثال:

$\frac{1}{x} = -\frac{1}{(x)^2}$, $\frac{1}{x^3+1} = \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$, $\frac{3}{x^4} = \frac{-12x^3}{x^8} = \frac{-12}{x^5}$, $\frac{1}{x^2+2x} = \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$

$f(x) = (x^3+2x)(x^4-1) \rightarrow f'(x) = (3x^2+2)(x^4-1)+(4x^3)(x^3+2x)$

$g(x) = \frac{2x-1}{x^3+2x+1} = g'(x) = \frac{2(x^3+2x+1)-(3x^2+2)(2x-1)}{(x^3+2x+1)^2}$

$h(x) = \frac{-3}{4x^3+2x} = h'(x) = \frac{3(12x^2+2)}{(4x^3+2x)^2}$

مشتق توابع مثلثاتی

فرمول :

1. $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$
3. $f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$
4. $f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -(1 + \tan^2 x)$

توابع معکوس مثلثاتی

توابع معکوس مثلثاتی توابعی هستند که بر عکس توابع مثلثاتی عمل می کنند به این معنی که مقدار نسبت مثلثاتی مربوط به یک زاویه را به عنوان ورودی میگیرد و مقدار زاویه را به عنوان خروجی مشخص می کند.

مثال:

$\text{Sin}\frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow \text{arc sin } 1 = \frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = 1 \rightarrow \text{arc cos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی از فرمول های زیر بدست می آید.

$$f(x) = \text{arc}\sin x \to f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x) = \text{arc}\sin x^2 \to f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$f(x) = \text{arc}\cos x \to f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x) = \text{arc}\tan x \to f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$f(x) = \text{arc}\tan \sin x \to f'(x) = -\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

$$f(x) = \text{arc}\tan \cos x \to f'(x) = -\frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$f(x) = \text{arc}\cot u \to f'(x) = -\frac{-u}{1+u^2}$$

مثال:

$$h(x) = \text{arc}\cos(4x^3+2x) \to h'(x) = -\frac{12x^2+2}{\sqrt{1-(4x^3+2x)^2}}$$

مشتق توابع نمایی

$$f(x) = a^u \to f'(x) = u'a.\ln a$$

$$f(x) = 3^{4x^2-3} \to f'(x) = 8x.\ 3^{4x^2-3}.\ln 3$$

$$f(x) = 2^{\sqrt{x}} \to f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}.\ 2^{\sqrt{x}}.\ln 2$$

یادآوری $(x^{\frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}})$

$$f(x) = e^u \to f'(x) = u'e^u$$

$$\boxed{f(x) = e^x \to f'(x) = e^x}$$

$$h(x) = e^{x^2} \to f'(x) = 2x.\ e^{x^2}$$

$$h(x) = e^{\sin x+\cos x} \to f'(x) = (\cos x-\sin x).\ e^{\sin x+\cos x}$$

$$f(x) = e^{\tan x} \to f'(x) = (1+\tan^2 x).\ e^{\tan x}$$

مشتق توابع لگاریتمی

$$f(x) = \log_a u \to f'(x) = \frac{u'}{\ln a . u}$$

$$f(x) = \log_2 x^2 \to f'(x) = \frac{x^2}{\ln 2 . x^2}$$

$$f(x) = \log_3 \sin x \to f'(x) = \frac{\cos x}{\ln 3 . \sin x}$$

$$f(x) = \ln u \to f'(x) = \frac{u'}{u} \qquad \boxed{f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 4x) \to f'(x) = \frac{2x+4}{(x^2+4x)}$$

$$f(x) = \ln\cos x \to f'(x) = \frac{-\sin x}{(\cos x)} \qquad \boxed{f(x) = \ln\ln x \to f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}}$$

مثال:

$$f(x) = x^2\cos x \to f'(x) = 2x\cos x - x^2\sin x$$

$$g(x) = \sin x . e^x + \ln x \to g'(x) = (\cos x . e^x)+(e^x . \sin x)+\frac{1}{x}$$

$$k(x) = x . 2^{x^2} + ee^x + 1 \to k'(x) =[2^{x^2}+(2\times 2^{x^2}\ln x)x]+ee^x+0$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x . e^x} \to f'(x) = \frac{2x(x . e^x)-(e^x . e^x)(x^2+1)}{(x . e^x)^2}$$

مشتق توابع مرکب

فرمول:

$$h(x) = f(g(x)) \to h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

(مشتق اول در دومی + مشتق دوم در اولی) یادآوری

$$h(x) = \sin^5 x \to h'(x) = 5\sin^4 x . \cos x$$

$$f(x) = \sin 5x \to f'(x) = 5 \cos x5$$

$$f(x) = \sin^5 3x \to f'(x) = 5\sin^4 3x . \cos 3x . 3$$

$$k(x) = (x^2+2x)^5 \to k'(x) =5(x^2+2x)^4.(2x+2)$$

$g(x) = \cos^3 2x \rightarrow g'(x) = -3\sin^2 2x.(\sin 2x).2$

$f(x) = \sqrt[3]{4x^2+5} \rightarrow f(x) = (4x^2+5)^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(4x^2+5)^{\frac{-2}{3}}.(8x)$

تمرین ۱ درسهای قبلی:

1. $y = (t^3 + 3t)(1 + \frac{5}{t})$
2. $y = x(x+1)(x-1)$
3. $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
4. $y = \frac{\sin x}{x}$
5. $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$
6. $y = (5t^2 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{t^2})$
7. $y = 2x(2x+1)(x-1)$
8. $y = \frac{x(x^2-1)}{x^4-1}$
9. $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$
10. $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
11. $y = \frac{2x+3}{x+2}$
12. $y = \frac{3x^2+2x}{2x+5}$
13. $y = \frac{(2x^2-1)(3x^2+1)}{4x^5-3x^2+1}$
14. $y = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(2x-1)(2x^2+1)} \rightarrow \frac{(x^2+1)+2x(x-1)}{2(2x^2+1)+4x(2x-1)}$

$= \frac{[(x^2+1)+2x(x-1)][(2x-1)(2x^2+1)]-[2(2x^2+1)+4x(2x-1)][(x-1)(x^2+1)]}{[(2x-1)(2x^2+1)]^2}$

تمرین ۲ :

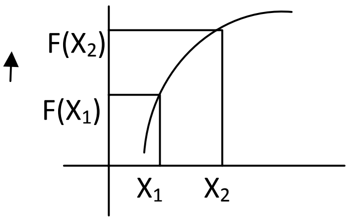
1. $y = 4\cos 3x + 5\sin 2x$
2. $y = \cos x^2$
3. $y = x^2 \sin x^2 = y' = 2x.\ \sin x^2 + (2x \cos x^2)(x^2)$
4. $y = \cos^2 x \sin 2x = y' = (-2\cos x \sin x)(\sin 2x) + (2\cos 2x)(\cos^2 x)$
5. $y = \sin x - \cos x$
6. $y = \frac{\sin x}{x}$
7. $y = \sqrt[3]{\cos x} = y' = (\cos x)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}(\cos x)^{\frac{-2}{3}}.\sin x$
8. $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$
9. $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
10. $y = \sin(\sin x) = y' = \cos(\sin x).\cos x$
11. $y = \cos(\sin x) = y' = -\sin x(\sin x).\cos x$
12. $y = \cos \sin \cos x$
13. $y = \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}$

کاربرد مشتق

توابع صعودی و نزولی

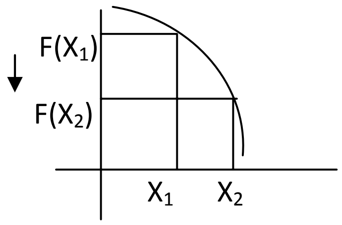
تعریف: تابع $f(x)$ را صعودی می گوییم هرگاه برای هر X_1 , X_2 از دامنه تابع داشته باشیم:

صعودی $X_1 < X_2 \leftrightarrow f(X_1) < f(X_2)$



و تابع $f(x)$ را نزولی می گوییم هرگاه برای هر X_1 , X_2 از دامنه تابع داشته باشیم:

نزولی $X_1 < X_2 \leftrightarrow f(X_1) > f(X_2)$



برایتعیین صعودی و نزلی بودن تابع از مشتق استفاده می کنیم. به این معنی که اگر $f(x)$ صعودی باشد $f'(x)>0$ است و اگر تابع نزولی باشد $f'(x)<0$ است.

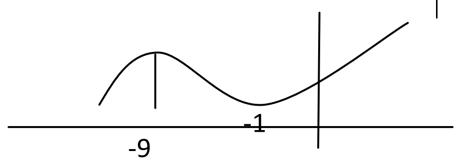
مثال: وضعیت یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) هر یک از توابع زیر را مشخص کنید؟

$y = \frac{1}{3}x^3+5x^2+9x$

$y' = x^2 + 10x + 9$ → $x = -1$

$(x + 1)(x + 9)= 0$ → $x = -9$

x	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
y'		++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++	
		↗		↘		↗	



$y = \frac{-3}{x}$

$y' = \frac{3}{x^2} > 0$ صعودی

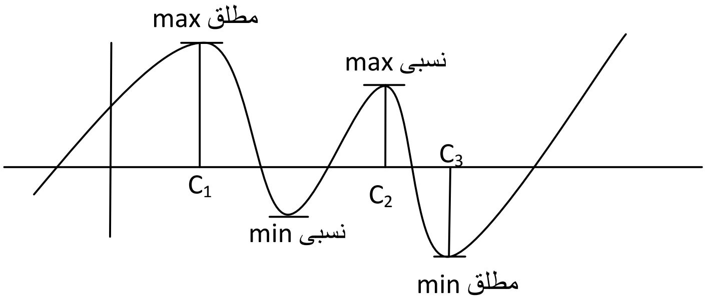
$y = -5x + 4$

$y' = -5 < 0$ نزولی

اکسترمم های نسبی و مطلق

نقطه c را max نسبی تابع f(x) می گوییم هرگاه نسبت به نقاط همسایگی اش بیشترین مقدار را داشته باشد. و این نقطه را min نسبی تابع f(x) می گوییم هرگاه نسبت به نقاط همسایگی اش کمترین مقدار را داشته باشد.

تعریف: نقطه c را max مطلق تابع f(x) است هرگاه نسبت به کل دامنه f بیشترین مقدار را داشته باشد و min ومطلق است هرگاه نسبت به کل دامنه f کمترین مقدار را داشته باشد.



اکسترمم های نسبی

نقطه بحرانی

نقطه c یک نقطه برای تابع f(x) است اگر f' (c)=0 باشد یا f' (c) موجود نباشد. در واقع نقاط بحرانی نقاط مشکوک به اکسترمم بودن هستند.

برای مشخص کردن اکسترمم های نسبیتابع f ابتدا نقاط بحرانی تابع را مشخص می کنیم سپس مشتق را در اطراف نقاط برای تعیین علامت می کنیم . در صورتی که مشتق تابع قبل و بعد از نقطه بحرانی تغییر علامت داده باشد نقطه مورد نظر یک اکسترمم نسبی است در غیر این صورت اکسترمم نداریم.

مثال: اکسترمم های نسبی تابع زیر را مشخص کنید؟

$f(x) = 2x^3+3x^2-72x$

$f'(x) = 6x^2+6x-72 = 0 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \quad x = -4$

$(x+4)(x-3) = 0 \rightarrow x = 3$

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
y'	++++++		0	--------	0	++++++	
	↗		max نسبی	↘	min نسبی	↗	

$-12 \neq 0 \quad f(x) = \frac{4}{x^3}$

$f'(x) = 4(-\frac{3x^2}{x^6}) = \frac{-12}{x^4}$ نقاط بحرانی $\{ x^4 = 0 = 0$ غ ق ق

$\frac{-12}{x^4} < 0$ اکیداً نزولی می باشد

$y = 16 - 3x - 9x^2$

$y' = -18 - 3 = 0 \quad x = \frac{-1}{6}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
y'	++++++ ↗	ǁ 0 max نسبی $\cap$	-------- ↘

$y = 3\sqrt{x} + 3$

$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ نقاط بحرانی $\begin{cases} 1 \neq 0 \\ 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \end{cases}$

$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$ صعودی

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	++++++ ↗	ǁ 0	++++++ ↗

=0

$y = x^3$

$y' = 3x^2 > 0$ همواره صعودی است

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	++++++ ↗	ǁ 0	++++++ ↗

و اکسترمم نسبی نیست

$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 4$

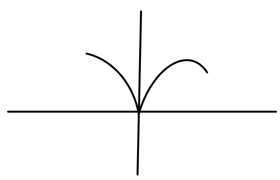
$y' = 6x^2 - 6x - 36$

$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3 ,\ x = -2$

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
y'	++++++ ↗	ǁ 0 max نسبی $\cap$	-------- ↘	ǁ 0 $\cup$ min نسبی	++++++ ↗

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^3}} > 0$ نقاط بحرانی $\begin{cases} 2 \neq 0 \\ 3\sqrt[3]{x^3} \end{cases}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	---------- ↘	ǁ 0 $\cup$ min نسبی	++++++ ↗

$y = 4x + \frac{16}{x}$ $D = R - \{ 0 \}$ $4x^2 - 16 = 0 \to 4x^2=16 \to x^2=4 \to x = \pm 2$

$y' = 4 - \frac{16}{x^2}$ $y' = \frac{4x^2-16}{x^2} = 0$ نقاط بحرانی $\to x^2 = 0$ $x=0$ غ ق ق

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++	
		↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

(x^2 همواره مثبت است)

$y = x + \frac{1}{x}$ $D = R - \{ 0 \}$ $x^2 - 1 = 0 \to x^2=1 \to x = \pm 1$

$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ نقاط بحرانی $\to x^2 = 0$ $x = 0$

(x^2 همواره مثبت است)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++	
		↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

اکسترمم مطلق

برای تعیین اکسترمم های مطلق تابع f روی بازه (a,b) ابتدا مقدار تابع را در اکسترمم های نسبی همچنین مقادیر fa و fb را تعیین می کنیم از بین مقادیر بدست آمده بیشترین مقدار max مطلق و کمترین مقدار min مطلق تابع است.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 4$ $(-3 , 4)$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		++++++	‖ 0	--------	‖ 0	++++++	
		↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

$f(-2) = 2(-8)-3(4)-36(-2)+4 =$

$f(3) = 2(27)-3(9)-36(3)+4 =$

$f(-3) = 2(-27)-3(9)-36(-3)+4 =$

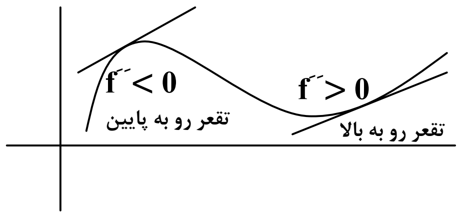
$f(4) = 2(64)-3(16)-36(4)+4 =$

جواب هر کدام بزرگتر بود اکسترمم مطلق است.

جهت تقعر منحنی

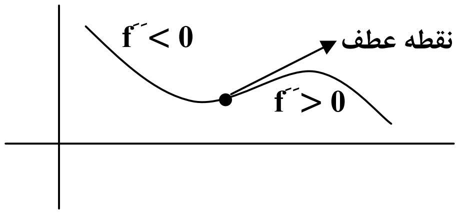
منحنی $f(x)$ را مقعر رو به بالا می گوییم اگر منحنی بالای خط مماس قرار داشته باشد و مقعر رو به پایین می گوییم هرگاه پایین خط مماس قرار گرفته باشد.

برای تشخیص جهت تقعر منحنی $f(x)$ از مشتق دوم تابع استفاده می کنیم به این معنی که بازه هایی که در آنها $f''(x) > 0$ باشد تابع مقعر رو به بالاست و بازه هایی که در آنها $f''(x) < 0$ باشد تابع مقعر رو به پایین است.



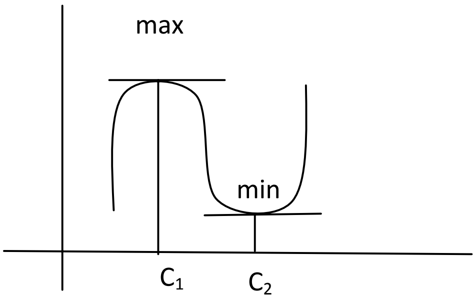
نقطه عطف

نقطه عطف تابع ریشه مشتق دوم نقطه عطف تابع است . اگر مشتق در جهت تقعر تابع قبل و بعد از آن تغییر کند .



آزمون مشتق دوم

فرض کنید C نقطه برای تابع $f(x)$ باشد نقطه C ماکزیمم نسبی تابع است اگر $f''\ C < 0$ باشد و مینیمم نسبی تابع است اگر $f''\ C > 0$ باشد.



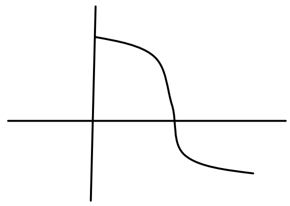
$f''(c_1) < 0 \rightarrow$ max نسبی

$f''(c_2) > 0 \rightarrow$ min نسبی

مثال: جدول تغییرات توابع زیر را رسم کنید (صعودی، نزولی، اکسترمم های مطلق و نسبی، عطف و جهت تقعر تابع)؟

$y = \cos x \quad (0 , \pi) \rightarrow x = 0$ $\qquad y' < 0$ نزولی

$y' = -\sin x = 0 \rightarrow x = \pi$



$-\cos x = -1 < 0$ max نسبی

$y'' = -\cos x$ نقاط بحرانی $\rightarrow -\cos \pi = 1 > 0$ min نسبی $\qquad$ نقطه عطف $= -\cos x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

مثال ۲ :

$y = x^2 = 2x + 1 \qquad (-2 , 2)$

$y' = 2x + 2 = 0 \quad x = -1$

$y'' = 2$ عطف ندارد

$f(-1) = 1 - 2 + 1 = 0$ min مطلق

$f(-2) = 4 - 4 + 1 = 1$

$f(2) = 4 + 4 + 1 = 9$ max مطلق

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y′	---------- ↘	‖ 0 min نسبی	++++++ ↗

مثال ۲ :

$y = \sqrt{x^2 + 25} = (x^2 + 25)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(x^2 + 25)^{\frac{-1}{2}} + x(-\frac{1}{\cancel{2}})(x^2 + 25)^{\frac{-3}{2}}(\cancel{2}x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}}$

نقاط بحرانی $x = 0$ و $x^2 + 25 \neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y′	---------- ↘	‖ 0 min نسبی	++++++ ↗

$y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 25)^3}} = \frac{25}{\sqrt{(x^2 + 25)^3}} > 0$ تقعر رو به بالاست و نقطه عطف ندارد

مثال ۳ :

$xy = 1 = y = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{-1}{x} \qquad y' < 0$ نزولی و اکسترمم نسبی ندارد

$y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$ نقطه عطف ندارد

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y′	---------- ↘ تقعر رو به پایین	‖ ت ن	++++++ ↗ تقعر رو به بالا

پایان درس ریاضی عمومی